**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 13 , Abgabe: 28.01.1991 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 41:**
Sei $A : L_2(X) \to \mathbf{C}^m$ gegen durch

$$(Af)_k = (f, u_k) \ , \qquad k = 1, \ldots, m$$

mit gewissen linear unabhängigen $u_k \in L_2(X)$. Sei $f_\omega$ die Tychonoff–Phillips-Lösung zu $Af = g$. Geben Sie eine Funktion $\delta_\omega(x,y)$ an, so daß

$$f_\omega(x) = \int_X f(y)\delta_\omega(x,y)dy \ .$$

**Aufgabe 42:**
Sei $R$ die Radon–Transformation.
Zeigen Sie: Für $f \in S(\mathbf{R}^n)$ ist

$$R^*Rf(x) = |S^{n-2}| \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|} dy \ ,$$

wobei $S^n$ die Oberfläche der n–dimensionalen Einheitssphäre ist (also $S^0 = 2, \ \ S^1 = 2\pi$ usw.). Falls Ihnen das zu schwierig vorkommt, beschränken sie sich auf den Fall $n = 2$.

**Aufgabe 43:**
Zeigen Sie: Für gerades $g \in S(Z)$ ist

$$(R^*g)^\wedge(\xi) = 2(2\pi)^{(n-1)/2}|\xi|^{1-n}\hat{g}(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|) \ .$$

Hierbei ist $\hat{g}$ die eindimensionale Fourier-Transformation bzgl. der ersten Variablen.
Hinweis: Gehen Sie aus von

$$\int_{\mathbf{R}^n} R^*gf dx = \int_Z gRf d\Theta ds$$

und berechnen Sie $(R^*g)^\wedge$ als Fourier–Transformation der Distribution $R^*g \in S'(\mathbf{R}^n)$.

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 10 , Abgabe: 07.01.1991 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 32:**
Seien $\mu_k(f)$ die zentrierten Momente von $f$.

Zeigen Sie, daß

$$\rho_2(f) = (\mu_{20}(f) - \mu_{02}(f))^2 + 4\mu_{11}^2(f)$$

invariant gegenüber Bewegungen ist.

**Aufgabe 33:**
Sei $\Gamma : x = \gamma(s), \quad 0 \leq s \leq L$, eine zweimal stetig differenzierbare Kurve im $\mathbf{R}^2$ ohne singuläre Punkte. Der Parameter $s$ sei die Bogenlänge. Sei $\phi(s)$ der (kleinere) Winkel zwischen der Tangente an $\Gamma$ in $\gamma(s)$ und einer festen Geraden, und sei $k(s) = |\frac{d}{ds}\,\phi(s)|$ die Krümmung von $\Gamma$ in $\gamma(s)$. Sei

$$\hat{k}_\ell = \int_0^L k(s)\, e^{-2\pi i\ell s/L}\, ds\,, \qquad \ell \in \mathbf{Z}$$

(a) Drücken Sie $\hat{k}_\ell$ durch $\gamma$ aus.

(b) Zeigen Sie, daß $\hat{k}_\ell$ affin invariant ist.

**Aufgabe 34:**
Für $p > 0$ gerade sei $\Gamma$ der Polygonzug mit $p$ Ecken $a_0, \ldots, a_{p-1}$, der für $p = 8$ und $p = 16$ unten abgebildet ist.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Deskriptoren $|\hat{a}_k|, \; k = 0, \ldots, p-1$ von $\Gamma$.

(b) Zeigen Sie: Sind $|\hat{b}_k|$ die Fourier-Deskriptoren eines weiteren Polygonzugs $\Gamma'$ mit $p$ Ecken und ist $|\hat{b}_k| = |\hat{a}_k|, \; k = 0, \ldots, p-1$, so liegen die Ecken von $\Gamma'$ je zur Hälfte auf zwei konzentrischen Kreisen mit Radius 1 zwischen 1 und $r$ einschließlich. Hat einer der Kreise den Radius 1 oder $r$, so stimmen $\Gamma$ und $\Gamma'$ bis auf Rotation überein.

| | | |
|---|---|---|
| Innerer Kreis | : | Radius 1 |
| Äußerer Kreis | : | Radius $r > 1$ |

$p = 8$

$p = 16$

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 9 , Abgabe: 17.12.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 30:**
Sei $\phi \in C^\infty[0,\infty)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1)
$$\int_0^\infty |\phi(s)s|ds < \infty\,, \quad \int_0^\infty \phi(s)sds \neq 0\,.$$

2) Gilt für ein integrierbares $h$ mit kompaktem Träger
$$\int_0^\infty \phi(\rho s)h(s)ds = 0\,, \quad 0 \le \rho < \infty\,,$$
so ist $h = 0$.

Die Funktion $\phi(s) = e^{-s}$ ist ein Beispiel einer solchen Funktion. Sei $f_0$ eine radiale Funktion in $\mathbf{R}^2$ mit $|\hat{f}_0(\xi)| = \phi(|\xi|)$ und sei $F$ die Menge aller Funktionen, die durch eine affine Transformation aus $f_0$ hervorgehen.
Zeigen Sie:

(a) Sind $f, g \in F$ und ist $N_f = N_g$, so geht $f$ aus $g$ durch eine Bewegung hervor.

(b) Sind $f, g \in F$ und ist $P_f = P_g$, so geht $f$ aus $g$ durch Streckung, eventuell Spiegelung, eventuell Punktspiegelung, und eine Translation hervor.

(c) $T_f$ ist konstant auf $F$.

Hinweis: Jede $(n,n)$-Matrix $A$ läßt sich in der Form $A = UDV$ schreiben mit unitären Matrizen $U, V$ und einer Diagonalmatrix $D$ mit nichtnegativen Elementen.

**Aufgabe 31:**

(a) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$. Sei $(Rf)^\wedge$ die eindimensionale Fourier-Transformation von $Rf$ bezüglich des zweiten Arguments, und sei $\hat{f}$ die zweidimensionale Fourier–Transformation von $f$.

Zeigen Sie:
$$(Rf)^\wedge(\Theta,\sigma) = (2\pi)^{1/2}\hat{f}(\sigma\Theta)\,, \qquad \sigma \in \mathbf{R}^1\,, \quad \Theta \in \mathcal{S}^1\,.$$

(b) Benutzen Sie (a), um einen Algorithmus zur Suche nach Geraden in einem $N \times N$–Bild zu konstruieren, welcher mit $O(N^2 \log N)$ Operationen auskommt.

Prof. Dr. F. Natterer WS 1990/91

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 8 , Abgabe: 10.12.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 28:**
Sei $H_p$ die Hadamard-Matrix der Ordnung $N = 2^p$ aus Aufgabe 26 (b). Zeilen und Spalten von $H_p$ seien mit den Nummern $0, \ldots, N-1$ bezeichnet. Die Dualdarstellung von $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ sei $(i_{p-1}, \ldots, i_0)$, also $i = i_0 + 2i_1 + \ldots + 2^{p-1}i_{p-1}$ mit $i_\ell \in \{0, 1\}$.

(a) Zeigen Sie, daß $H_p$ für jedes $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ genau eine Zeile mit genau $i$ Zeichenwechseln gibt.

(b) Die Abbildung $z$ von $\{0, \ldots, N-1\}$ in sich selbst sei erklärt durch

$$\begin{aligned} z_0(i) &= i_{p-1} \\ z_\ell(i) &= i_{p-\ell} + i_{p-\ell-1} \mod (2)\ , \quad \ell = 1, \ldots, p-1\ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß $H_p$ in Zeile $z(i)$ genau $i$ Zeichenwechsel hat.

(c) Sei $f = (f_0, \ldots, f_{N-1})^T$, $g = (g_0, \ldots, g_{N-1})^T$ und $g = H_p f$.
Zeigen Sie, daß

$$g_i = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{i_0 j_0 + \ldots + i_{p-1} j_{p-1}} f_j\ , \quad i = 0, \ldots, N-1\ .$$

(d) Sei $H = H_p \otimes H_p$ die zweidimensionale Hadamard-Matrix,
$f = (f_{00}, f_{01}, \ldots, f_{N-1,N-1})^T$,
$g = (g_{00}, g_{01}, \ldots, g_{N-1,N-1})^T$
und $g = Hf$.
Wie lautet die (c) entsprechende Formel?

**Aufgabe 29:**
Sei $K$ die $(N, N)$-Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \rho & \ldots & \rho^{N-2} \\ & \vdots & & & \\ \rho^{N-1} & , \ldots, & & & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, daß
$$\det(K) = (1 - \rho^2)^{N-1}\ , \quad N = 1, 2, \ldots$$

(b) Schließen Sie aus (a), daß $K$ für $|\rho| < 1$ positiv definit ist.

(c) Sei $f = (f_1, \ldots, f_N)^T$ ein Bild mit $K_f = K$. Sei $U$ eine unitäre $(N, N)$-Matrix, deren erste Spalte konstant ist. Dann gilt für $M > 0$

$$\lim_{\rho \to 1} E \, \|f - f^M\|^2 = 0 \, .$$

Hinweis: (a) Entwickeln Sie nach der ersten Zeile.

(b) Sehen Sie sich die Hauptminoren an, vgl. *Lorenz*, **LA II**, S. 69.

Prof. Dr. F. Natterer WS 1990/91

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 7 , Abgabe: 03.12.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 24:**
Sei $f = (f_1, \ldots, f_\nu)$ ein Bild mit

$$Ef_k = \mu\ , \quad \rho(f_k, f_{k+1}) = \rho\ .$$

Sei $\hat{f}_{k+1} = \alpha f_k + \beta$ eine Schätzung für $f_{k+1}$ und $d_k = \hat{f}_k - f_k$.
Zeigen Sie:

(a) $E(d_{k+1}^2)$ ist minimal für $\alpha = \rho$, $\beta = (1-\rho)\mu$.

(b) Sind $\alpha, \beta$ wie in a) gewählt, so sind $d_k$, $d_{k+1}$ unkorreliert.

(c) Sind $\alpha$, $\beta$ wie in a) gewählt, so ist $Ed_{k+1} = 0$.

**Aufgabe 25:**
Die Transformation $q = Uf$ mit der $(N, N)$-Matrix

$$U_{k\ell} = \sqrt{\frac{2}{N+1}}\ \sin\frac{k\ell\pi}{N+1}\ , \qquad k, \ell = 1, \ldots, N$$

heißt Sinus-Transformation.

(a) Zeigen Sie, daß $U$ unitär ist.

(b) Zeigen Sie, daß $U$ die Karhunen–Loêve- Transformation für die Kovarianzmatrix

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \rho & & & \\ \rho & 1 & \rho & & \\ & \rho & 1 & \rho & \\ & & & \ddots & \\ & & & \rho & 1 \end{pmatrix}\ , \qquad 0 \le |\rho| \le \frac{1}{2}$$

ist. Bestätigen Sie, daß $K$ positiv definit ist.

(c) Schreiben Sie mit Hilfe von dft ein Programm dst zur schnellen Sinus-Transformation.

**Aufgabe 26:**
Eine $(N, N)$–Matrix heißt Hadamard-Matrix der Ordnung $N$, wenn sie orthogonal ist und als Elemente nur $+1$ und $-1$ enthält.

(a) Zeigen Sie: gibt es eine Hadamard-Matrix der Ordnung $N > 2$, so ist $N$ durch 4 teilbar.

(b) Sei

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_{p+1} = H_1 \otimes H_p\,, \quad p = 1, 2, \ldots\,.$$

Zeigen sie, daß $H_p$ eine Hadamard-Matrix der Ordnung $2^p$ ist und und berechnen Sie $H_p^{-1}$.

(c) Zeigen sie: Für die in (b) definierten Hadamard-Matrizen der Ordnung $N = 2^p$ gibt es einen Algorithmus, der mit $N \log_2 N$ Additionen/Subtraktionen auskommt.

**Aufgabe 27:**
Seien $U_1$, $U_2$ die Karhunen–Loêve–Transformationen für die positiv definiten Kovarianz-Matrizen $K_1$ bzw. $K_2$.

Zeigen Sie: Dann ist $K = K_1 \otimes K_2$ ebenfalls positiv definit und hat die Karhunen–Loêve–Transformation $U_1 \otimes U_2$.

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 6 , Abgabe: 26.11.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 20:**
Sei

```
           dft(float * x, int p, int sign)
bzw.
Procedure  dft(VAR X : ARRAY OF REAL;CARDINAL p; INTEGER sign);
```

ein Programm für die eindimensionale diskrete Fourier-Transformation der Länge $p$, d.h. das Feld $x[0], \ldots, x[p-1]$ wird für sign = 1 mit

$$\hat{x}[k] = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi ijk/p} x[j]$$

und für sign = $-1$ mit

$$\tilde{x}[k] = \sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi ijk/p} x[j]$$

überschrieben. Schreiben Sie mit Hilfe von dft ein Programm

```
           dft2(float * x, int p, int sign)
bzw.
Procedure  dft2(VAR x : ARRAY[1..MAX,1..MAX]
           OF REAL;CARDINAL p;INTEGER sign);
```

zur zweidimensionalen Fourier-Transformation der Länge $p$.

**Aufgabe 21:**
Schreiben Sie unter Benutzung der Programme der Aufgabe 20 Programme

```
           conv(float * y, float * w, float * z, int p)
bzw.
Procedure  conv(VAR x,w,z : ARRAY OF REAL;CARDINAL p)
und
           conv2(float ** y, float ** w, float ** z, int p)
bzw.
Procedure  conv2(VAR y,w,z : ARRAY[1..MAX,1..MAX]
            OF REAL, CARDINAL p);
```

zur ein- bzw. zweidimensionalen Faltung der Länge $p$ ohne wrap-around-Fehler.

**Aufgabe 22:**
Sei $z = w * y$ eine nicht notwendig zyklische Faltung der Länge $p$ in $n$ Dimensionen. Sie

werde durch Fourier-Transformationen der Länge $p$ berechnet, d.h. es werde die inverse Fourier-Transformation von $p^n \hat{w}_k \hat{y}_k, \ 0 \leq k < p$ berechnet.

Zeigen Sie: Ist $w_\ell \neq 0$ nur für $-s \leq \ell \leq s$, dann ist das Ergebnis richtig für $s \leq k \leq p-s-1$ (d.h. der wrap-around-Fehler tritt nur an den Bildrändern auf, und zwar in einer Breite von $s$ Pixeln).

**Aufgabe 23:**
Für die $(p,q)$-Matrix $A$ und die $(r,s)$-Matrix $B$ ist das Tensorprodukt $C = A \otimes B$ erklärt als die $(pr, qs)$-Matrix

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1q}B \\ \vdots & & \\ a_{p1}B & \dots & a_{pq}B \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie: Ist $W_p$ die Matrix der eindimensionalen Fourier-Transformation der Länge $p$, so ist $W_p \otimes W_p$ die Matrix der zweidimensionalen Fourier-Transformation der Länge $p$. Dabei stellt man sich die Komponenten der zweidimensionalen Felder zeilenweise zu Vektoren zusammengefaßt vor.

(b) Sei $p = qr$ und $\mathrm{ggt}(q,r) = 1$. Dann gibt es Permutationsmatrizen $P, Q$, so daß

$$W_p = P(W_q \otimes W_r)Q .$$

Zeigen Sie dies für $p = 6$, $q = 3$, $r = 2$.

Prof. Dr. F. Natterer WS 1990/91

## Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 5 , Abgabe: 19.11.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 16:**
Sei $K = \{\xi \in \mathbf{R}^2 \ : \ |\xi_1| + |\xi_2| \leq b\}$.

(a) Bestimmen Sie das quadratische achsenparallele Gitter $L$ maximaler Effizienz für $K$ und geben Sie $\eta(L, K)$ an.

(b) Geben Sie ein Gitter $L$ mit $\eta(L, K) = 1$ an.

**Aufgabe 17:**
Wie Aufgabe 16, aber mit

$$K = \{\xi \in \mathbf{R}^2 \ : \ |\xi_2| \leq b\ ,\ |\xi_1| \leq |\xi_2|\}\ .$$

**Aufgabe 18:**
Sei $L$ ein Gitter in $\mathbf{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) $\hat{L} = \{\xi \in \mathbf{R}^n \ : \ \frac{1}{2\pi}\,\xi \cdot x \in \mathbf{Z}\ , \quad \forall\, x \in L\}$

(b) $L$ hat die Periode $p \in \mathbf{R}^n$ (d.h. $L + p = L$) genau dann, wenn $p \in L$.

(c) Sei $n_L$ die Anzahl der Punkte von $L$ pro Einheitsvolumen. Dann ist

$$n_L n_{\hat{L}} = (2\pi)^{-n}\ .$$

**Aufgabe 19:**
Sei $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ $b$-bandbeschränkt.

(a) Zeigen Sie: Ist $h < \frac{\pi}{b}$, so gibt es eine von $x, h, f$ unabhängige Zahl $C$ mit

$$|f(x)| \leq C \max_{k \in \mathbf{Z}^n} |f(hk)|\ .$$

(b) Gilt dies auch für $h = \frac{\pi}{b}$ ?

(c) Wie lautet die Aussage (a) für ein beliebiges Gitter $L$?

## Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 4 , Abgabe: 12.11.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 11:**
Zeigen Sie: Für $h = \frac{\pi}{b}$ bilden die Funktionen

$$f_k(x) = h^{-n/2} \operatorname{sinc} b(x - hk) \,, \qquad k \in \mathbf{Z}^n$$

ein Orthonormalsystem in $L_2(\mathbf{R}^n)$.

**Aufgabe 12:**
Zeigen Sie mit Hilfe der Reihe von Aufgabe 6:

$$\int_0^\chi t^\nu J_{\nu-1}(t)dt = \chi^\nu J_\nu(\chi) \,, \qquad \nu \geq 1 \,.$$

**Aufgabe 13:**
Sei $S_h f$ die sinc-Reihe für $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, d.h.

$$(S_h f)(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} f(hk) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{h}(x - hk) \,.$$

Zeigen Sie:

$$\int (S_h f)(x)dx = h^n \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} f(hk)$$

**Aufgabe 14:**
Sei für $\varepsilon > 0,\ b > 0$

$$f(x) = e^{-\varepsilon^2 x^2} \sin b\,x \quad , \qquad x \in \mathbf{R}^1 \,.$$

Zeigen Sie:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}\,2i\varepsilon} \left( e^{-(\xi-b)^2/2\varepsilon^2} - e^{-(\xi+b)^2/2\varepsilon^2} \right)$$

Prof. Dr. F. Natterer WS 1990/91

## Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 3 , Abgabe: 05.11.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 8:**
Sei $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $p$ eine ganze positive Zahl und $h = \frac{2\pi}{p}$.
Zeigen Sie:

(a) $$h^n \sum_{0\le k<p} f(hk) = (2\pi)^n \sum_{\ell} \hat{f}_{p\ell}$$

(b) $$\int_{[0,2\pi]^n} f(x)dx - h^n \sum_{0\le k<p} f(hk) = -(2\pi)^n \sum_{\ell\neq 0} \hat{f}_{p\ell}$$

Hierbei ist $0 \le k < p$ komponentenweise zu verstehen, und $k, \ell \in \mathbf{Z}^n$.

**Aufgabe 9:**
Ein sich mit der Geschwindigkeit $v \in \mathbf{R}^n$ bewegendes Bild $f \in \mathcal{S}$ werde mit Belichtungszeit $\Delta t$ photographiert. Auf dem Film entsteht dann das Bild

$$g(x) = \int_0^{\Delta t} f(x + tv)dt \,.$$

Sei $T$ die Distribution

$$Tf = \int_0^{\Delta t} f(-tv)dt \,.$$

Zeigen Sie:

(a) $g = f * T$

(b) $\hat{g}(\xi) = 2\, e^{ia}\, \mathrm{sinc}(a)\, \hat{f}(\xi)$ mit $a = \Delta t v \cdot \xi$ .

Kann man $f$ aus $g$ berechnen?

**Aufgabe 10:**
Ein mit Winkelgeschwindigkeit $\omega$ rotierendes Bild $f \in \mathcal{S}$ werde mit Belichtungszeit $T$ photographiert. Auf dem Film entsteht dann das verschmierte Bild

$$g(x) = \int_0^T f(U(t)x)dt \,, \quad U(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} .$$

Setzen sie

$$x = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} , \quad f(x) = \sum_k f_k(r) e^{ik\varphi} , \quad g(x) = \sum_k g_k(r) e^{ik\varphi}$$

und berechnen Sie die $g_k$ aus den $f_k$.

Kann man die $f_k$ aus den $g_k$ berechnen?

Prof. Dr. F. Natterer WS 1990/91

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 1 , Abgabe: 22.10.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 1:**
Sei $T$ der Cauchysche Hauptwert, also

$$Tf = \int \frac{f(x)}{x} dx \, .$$

Zeigen Sie:

$$(a) \qquad T'f = -\lim_{h \to 0} \left\{ \int_{|x|\geq h} \frac{f(x)}{x^2} dx + \frac{f(h)+f(-h)}{h} \right\}$$

$$(b) \qquad Tf = \int \frac{f(x)-f(-x)}{2x} dx$$

$$(c) \qquad \hat{T}(\xi) = -i \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \operatorname{sgn} \xi$$

**Aufgabe 2:**
Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $f$ homogen vom Grade $k$ (d.h. $f(tx) = t^k f(x)$ für $t \in \mathbf{R}^1$), so ist $\hat{f}$ homogen vom Grade $-k-n$.

(b) Ist $f$ rotationsinvariant (d.h. $f$ ist eine Funktion von $|x|$), so ist auch $\hat{f}$ rotationsinvariant.

**Aufgabe 3:**
Sei $f \in L_1(\mathbf{R}^n) = \{f : f \text{ meßbar}, \int |f| dx < \infty\}$.
Zeigen Sie: $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$ mit

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} f(x) dx$$

**Aufgabe 4:**
Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; , & -1 \leq x_k \leq 1 \, , \quad k = 1, \ldots, n \, , \\ 0 \; , & \text{sonst} \; . \end{cases}$$

Berechnen Sie $\hat{f}$.

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 2 , Abgabe: 29.10.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 5:**
Für $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $r > 0$ sei $f_r(x) = f(rx)$. Für $T \in \mathcal{S}'$ sei

$$T_r f = r^{-n} T f_{1/r} \ .$$

Zeigen Sie:

1) $T_r \in \mathcal{S}'$

2) $\delta = r^n \delta_r$

3) $(T_r)^\wedge = r^{-n}(\hat{T})_{1/r}$

**Aufgabe 6:**
Sei $J_\nu$ die *Bessel*-Funktion 1. Art der Ordnung $\nu$, d.h.

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \qquad , \ \nu \geq 0 \ .$$

Zeigen Sie: Ist $f \in L_1(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 2$, eine radiale Funktion (d.h. $f(x) = f(|x|)$) so ist auch $\hat{f}$ radial, und es gilt

$$\hat{f}(\rho) = \rho^{(2-n)/2} \int_0^\infty r^{n/2} \ J_{(n-2)/2}(r\rho) f(r) dr$$

Hinweis: Für $n \geq 2$ und $\Theta \in S^{n-1}$ gilt

$$\int_{S^{n-1}} e^{i\sigma\Theta\cdot\omega} d\omega = (2\pi)^{n/2} \sigma^{(2-n)/2} \ J_{(n-2)/2}(\sigma)$$

**Aufgabe 7:**
Sei $x \to x' = Ax + a$ eine affine Abbildung in $\mathbf{R}^n$, d.h. $A$ ist eine nicht-singuläre $(n,n)$-Matrix und $a \in \mathbf{R}^n$. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ und $F(x) := f(Ax + a)$.

(a) Zeigen Sie:

$$\hat{F}(A^T \xi) = \frac{1}{\det(A)} \, e^{ia\cdot\xi} \, \hat{f}(\xi) \ .$$

(b) $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ heißt radial, wenn für jede Rotation $U$ und jeden $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ gilt

$$Tf = T(f \circ U) \ .$$

Zeigen Sie: Ist $T$ radial, so auch $\hat{T}$.

# Prof. Natterer: Numerische Bildverarbeitung

Vorläufige Gliederung:

I Grundlagen der Nachrichtentechnik
Fourier-Analyse
Abtasttheoreme
Wavelets

II Bildverarbeitung
Image Enhancement
Feature extraction
Bandwidth compression

III Bildrekonstruktion
Tomographie
Radar
MRI

Literatur: variabel
zunächst: Yosida "Functional Analysis"

## TEIL I: Grundlagen der Nachrichtentechnik

### §1 Die Fourier-Transformation in $\mathcal{S}$

Literatur: Yosida, Functional Analysis, $\mathcal{S}$

Korollar zu Satz 1.1.: (Parseval'sche Formel):

$f, g \in \mathcal{S}$. Dann gilt:

$$\int \hat{f} g \, dx = \int f \hat{g} \, dx \qquad (*)$$

konj. komplex

$$\int f \bar{g} \, d\xi = \int \hat{f} \bar{\hat{g}} \, dx \qquad (**)$$

Beweis: 1. Formel zu (ii) im Beweis von Satz (1.1.):

$$f, g \in \mathcal{S} : \int g(\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi = \int \hat{g}(y) f(x+y) \, dy$$

$$x = 0 : \int g \hat{f} \, d\xi = \int \hat{g} f \, dy \quad \Rightarrow (*) \quad (\checkmark)$$

Setze nun in $(*)$ $\bar{\tilde{f}}$ für $f$:

$$\int g \hat{\bar{\tilde{f}}} \, d\xi = \int \hat{g} \bar{\tilde{f}} \, dy$$

$$\int g \bar{f} \, d\xi = \int \hat{g} \bar{\hat{f}} \, dy \quad = (**) \text{ mit } f, g \text{ vertauscht}$$

$$\hat{\bar{\tilde{f}}}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\cdot\xi} \bar{f}(x) \, dx$$

$$\bar{\hat{f}}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{+ix\cdot\xi} \bar{f}(x) \, dx$$

Bemerkungen: 1.) Die gleichen Beziehungen gelten auch für $\sim$.

2.) Führe in $\mathcal{S}$ das innere Produkt $(f, g) = \int f \bar{g} \, dx$ ein.

Dann ist $\mathcal{S}$ unitärer Raum.

Vervollständigung ergibt $L_2(\mathbb{R}^n) = \{ f \text{ meßbar} : \int |f|^2 dx < \infty \}$

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$$

Parseval'sche Bez.: $(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) = (\tilde{f}, \tilde{g})$

$\Rightarrow \wedge, \sim$ sind Isometrien von $L_2(\mathbb{R}^n)$.

## §2 Die Fourier-Transformation in $\mathcal{S}'$.

Def 2.1.:

Ein lineares Funktional $T$ auf $\mathcal{S}$ heißt (temperierte) Distribution, falls $C, k, l$ existieren mit

$$|Tf| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq l}} |f|_{\alpha,\beta} \quad ,$$

$$|f|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)|$$

Die Menge aller Distributionen wird mit $\mathcal{S}'$ bezeichnet.

Beispiele: 1.) $g$ meßbare Funktion, schwach wachsend
(d.h.: $\exists \underbrace{k}_{\in \mathbb{Z}} : \int |g(x)|(1+|x|)^k dx < \infty$ )

(z.B.: $e^{|x|}$ nicht schwach wachsend
$|x|^m$ schwach wachsend )

$$Tf := \int g f \, dx \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

Dafür gilt:

$$|Tf| = \left| \int g(x)(1+|x|)^k (1+|x|)^{-k} f(x) \, dx \right|$$

$$\leq \underbrace{\int |g(x)|(1+|x|)^k dx}_{\leq C} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-k} |f(x)|$$

Man sagt: $T$ wird von $g$ erzeugt ($T = T_g \overset{\text{''}}{=} g$)
(Konvention)

2.) $Tf = f(0)$

$$|Tf| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$$

$T = \delta$ = 'Dirac'sche $\delta$-Funktion'

3.) $Tf = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(h\cdot k)$ , $h>0$

$$|Tf| \le \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{-n-1} (1+|k|)^{n+1} f(hk)\Big|$$

$$\le \Big|\underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{-n-1}}_{=:C} \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+\tfrac{1}{h}|k\overset{h}{\curlyvee}|)^{n+1} |f(hk)|\Big|$$

$$\le C \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+\tfrac{1}{h}|x|)^k |f(x)|$$

$T = \underset{\uparrow}{Ш}$ „Shah-Distribution"

Buchst. „Shah"

4.) $\phi \ge 0$ , $\int \phi(x)\,dx = 1$

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\,\phi(\tfrac{1}{\varepsilon}x)$$

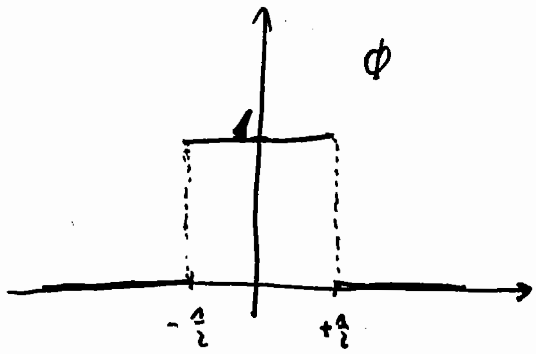
$f\in\mathcal{S}$ : $\int \phi_\varepsilon(x) f(x)\,dx = \varepsilon^{-n}\int \phi(\tfrac{1}{\varepsilon}x) f(x)\,dx$ $\quad\Big|\ \tfrac{1}{\varepsilon}x = x'$

$$= \int \phi(x') f(\varepsilon x')\,dx' \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(0)\underbrace{\int \phi(x')\,dx'}_{=1} = f(0)$$

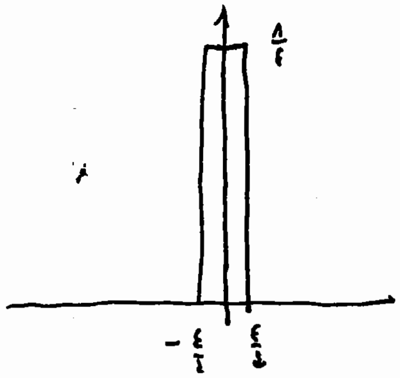
(S.v. major. Konvergenz)

$T_{\phi_\varepsilon} f \to \delta f$ , d.h. $T_{\phi_\varepsilon} \to \delta$

z.B.: $n=1$:




$T_{\Phi_\varepsilon} f$ :




$$T_{\Phi_\varepsilon} f = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{+\frac{\varepsilon}{2}} f(x)\, dx$$

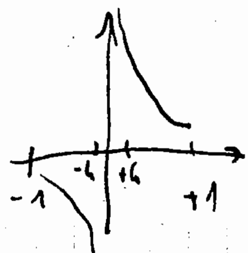
5.) $$Tf = \lim_{h\to 0} \int_{|x|\geq h} \frac{f(x)}{x}\, dx \qquad (\text{für } n=1)$$

$$= ⨍ \frac{f(x)}{x}\, dx$$ "Cauchy'scher Hauptwert"

$$= PV \int \frac{f(x)}{x}\, dx$$

principal value

~~[illegible]~~ $$\int_{|x|\geq h} \frac{f(x)}{x}\, dx = \underbrace{\int_{h\leq|x|\leq 1} \frac{f(x)}{x}\, dx}_{\int_{h\leq|x|\leq 1} \frac{f(x)-f(0)}{x}\, dx} + \int_{|x|>1} \frac{f(x)}{x}\, dx$$



$$\Rightarrow \left|\int_{\dots} dx\right| \underset{MWS}{\le} \int_{h\le|x|\le 1} \frac{|x| \max\limits_{[-1,+1]} f'(x)}{|x|}\, dx \le 2 \max_{[-1,+1]} |f'(x)|$$

$$\left|\int_{|x|\ge h} \frac{f(x)}{x}\, dx\right| \le 2 \sup_{x\in\mathbb{R}^1} |f'(x)| + \underbrace{\int_{|x|\ge 1} |x|\,|f(x)| \frac{dx}{x^2}}_{\le \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)||x| \cdot \int\limits_{|x|\ge 1} \frac{dx}{x^2}}$$

$$|Tf| \le 2 \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f'(x)| + C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)x|$$

**Definition 2.2.:** Sei $T \in \mathcal{S}'$!

a.) Für $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ : $(D^\alpha T)f := (-1)^{|\alpha|}\, T D^\alpha f \quad \forall f \in \mathcal{S}$

b.) $y \in \mathbb{R}^n$ : $T_y f = T f_{-y} \quad \forall f \in \mathcal{S}$

mit $f_y(x) = f(x+y) \leadsto f_{-y}(x) = f(x-y)$

c.) $g \in \mathcal{S}$ : $(gT)f = T(gf) \quad \forall f \in \mathcal{S}$

! d.) $g \in \mathcal{S}$ : $(g * T)(x) := T \check{g}_{-x}$ ($\check{g}(x) := g(-x)$ !)

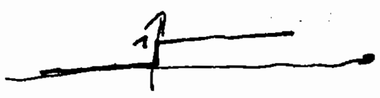
(ist Funktion !)

! e.) $\hat{T} f = T \hat{f} \quad \forall f \in \mathcal{S}$ (d.h.: $D^\alpha T$, $T_y$, $gT$, $g*T$, $\hat{T}$ neue Distributionen! $\in \mathcal{S}'$)

**Beispiele:** 1.) $(D^\alpha \delta) f = \delta(D^\alpha f)\,(-1)^{|\alpha|} = (D^\alpha f)(0)\,(-1)^{|\alpha|}$

2.) $n=1$ : $H(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ Heavyside - Fu.

$T_H$



$$T_H f = \int H(x)\, f(x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx$$

$$\left(\frac{d}{dx} T_H\right) f = -T_H f' = -\int_0^\infty f'(x)\, dx = f(0)$$

d.h.: $\underline{\frac{d}{dx} T_H = \delta}$

3.) $\delta_{-y} f = \delta f_y = f(y)$

Schreibweise: $\underline{\int \delta(x-y)\, f(y)\, dy = f(x)}$

4.) $(\delta_{-y})^\wedge f = \delta_{-y} \hat{f} = \hat{f}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\cdot y} f(x)\, dx$

$\Rightarrow \underline{(\delta_{-y})^\wedge = T_g \quad \text{mit} \quad g(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-ix\cdot y}}$

Schreibweise: $\underline{(\delta_{-y})^\wedge (x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-ix\cdot y}}$

~~Vorsicht bei folgender Ableitung:~~

$\cancel{\delta(x-y)}$

$\cancel{\delta(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\cdot\xi}\, \hat{\delta}(\xi)\, d\xi}$

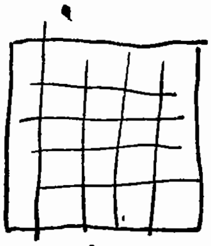
Num. Bildanalyse (15.10.90) (Vertr.)

Einschub: Diskrete Bildverarbeitung

Def: $F$ heißt diskretes $N \times M$ - Bild

$$:\Leftrightarrow F : \{0,\dots,N-1\} \times \{0,\dots,M-1\} \to \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{R}_+ \\ \mathbb{C} \\ \mathbb{Z} \\ \{0,1,\dots,256\} \end{cases}$$

M
256



N 256

65 536 Pixel

$O(N^2 M^2)$

Probleme: a.) Speicher

b.) Zeit

Lösung: a.) Informatik: Kompression auf 20%

(wichtig: invertierbar!)

$O(N^2M^2)$

$O(c \cdot N \cdot M)$

b.) Funktionen lokal

$$G(n,m) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} K(k,l,n,m)\, F(\underset{\text{mod } N}{n+k}, \underset{\text{mod } M}{m+l})$$

eff. z. Algorithm.?

(K bel. Kernfu.:

$K: \{0,N-1\} \times \{0,M-1\} \times \{0,N-1\} \times \{0,M-1\}$

sei: $k = k_1(k,n) \cdot k_2(l,m)$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} K_1(k,n) \Big( \underbrace{\sum_{l=0}^{M-1} K_2(l,m)\, F(n+k, m+l)}_{= H(n+k,m)} \Big)$$

Rechenaufw.: $M \cdot M \cdot N$

$N \cdot N \cdot M$

$\to O(N^2 M + M^2 N)$

# Diskrete Fourier-Transformation: (DFT)

$$y \in \mathbb{C}^N: \quad \hat{y}_k = n^{-N} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-ikj\frac{2\pi}{n}} y_j$$

$$\tilde{y}_j = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikj\frac{2\pi}{n}} y_k$$

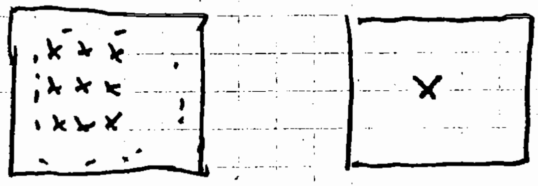
$$y, z \in \mathbb{C}^N \qquad (y * z)_j = \sum_{j=0}^{n-1} y_l \, z_{\underbrace{j-l}_{\mathrm{mod}\, n}}$$

Es gilt:

$$\left(\tilde{\hat{y}}\right)_k = n y_k, \qquad (\hat{y} \cdot \hat{z}) = (y * z)^\wedge$$

$$\Rightarrow \quad y * z = (\hat{y} \cdot \hat{z})^\sim \cdot \frac{1}{n}$$

$$K(k, l, n, m) = \tilde{K}(k, l), \qquad \tilde{K}: \{0, N-1\} \times \{0, M-1\} \to \mathbb{C}$$



F  G

z.B.:

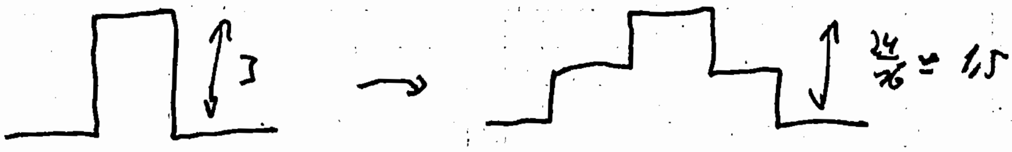
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{pmatrix} (-1,-1) & (0,-1) & (\,''\,) \\ (-1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (-1,1) & (0,1) & (\,''\,) \end{pmatrix}\right]$$

Stelle (0,0)

$$F: \quad \begin{matrix} & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \cdots \\ 1 & 1 & 3 & 1 \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \cdots \\ & 1 & & \end{matrix} \qquad G: \quad \begin{matrix} & 16 & 16 & 16 & \\ 16 & 18 & 20 & 18 & 16 \\ 16 & 20 & 24 & 20 & 16 \\ 16 & 18 & 20 & 18 & 16 \\ & 16 & 16 & 16 & \end{matrix}$$

Matr. Mult. + Aufaddieren!

Also:




Glättung! ("smooth - Filter")

("enhance":)

$$\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & 5 & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Also:

(Num. Bildver. 18.10.90)

(RZ) IBM

6. Stock: Informatik (etzel, güntzer, polya ..)

1. Stock: $\boxed{\text{CALDERON}}$ (108)
switek

<u>UNIX:</u> Einführung in UNIX: 6. Stock, Dietmar Lammers
2,- DM

in 2 Wochen: SR B : Atari-Rechner

<u>unix:</u> MSDOS: $\underbrace{\text{A:\textbackslash home\textbackslash ...\textbackslash}}_{\text{Pfad}}\underbrace{\text{file}}_{\text{Name}}$

UNIX: : $\underbrace{\text{/home/wuebbel/}}_{\text{Pfad}}\text{.../}\underbrace{\text{file}}_{\text{Name}}$

/home
calderon etzel ute switek
i

calderon login: <username> wuebbel
password: <password>
bash > ls / home <Dir>

cd / home / calderon

ls ~~m~~ wuebbel

gnome

~~compile~~

## Compiler:

cc für C

f77 für Fortran

## X-Windows

rechte Mouse-knopf : ...

~~$~~ cd ~ wuebbel/xcol ~~#~~ !

xcolview trui w

---

6. Stock : Hilfe : 603 : Julian, Stephan

Dirkmas, Fridolf

707 : Frank Wuebbel

? ...709

Num. Bildanalyse 22.10.?0

Informatik-Vorträge:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mo | 22.10. | $17^{00}$ | Kemper |
| Mi | 24.10. | $17^{00}$ | Bedest. |
| Fr. | 26.10. | $15^{00}$ | Ebert |
| Mo | 29.10. | $17^{00}$ | Claus |
| Mi | 31.10. | $17^{00}$ | Rulourd |

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$T \in \mathcal{S}'$

$$D^\alpha T f = (-1)^{|\alpha|} T D^\alpha f \quad . \quad D^\alpha T_g = T D^\alpha g$$

$$(g * T)(x) = T \check{g}_{-x} \quad , (\check{g}(x) := g(-x))$$

$$\hat{T} f = T \hat{f}$$

(Anm: $g*T$ und $T*g$ sollen das gleiche bedeuten!)

Beispiele: 1) $(f * \delta)(y)$

$$\overset{\text{Def.}}{=} \delta \check{f}_{-y} = \check{f}_{-y}(0) = \check{f}(-y) = f(y)$$

Schreibweise: $\int f(x)\, \delta(y-x)\, dx = f(y)$

2.) $$(g * T_h)(x) = T_h \check{g}_{-x} = \int h(y)\, g(x-y)\, dy$$
$$= (h*g)(x)$$

3.) $(\delta_{-y})^\wedge (\varphi) = \ldots$

$$\hat{\delta} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$$

Sei $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, d.h. $g$ meßbar, $\int |g|\,dx < \infty$

$$\Rightarrow \hat{T}_g f \overset{\text{def.}}{=} T_g \hat{f} = \int g(\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int g(\xi) \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx\,d\xi$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int f(x) \int e^{-ix\cdot\xi} g(\xi)\,d\xi\,dx$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\hat{T}_g f = T_{\hat{g}} f}} \quad \text{mit} \quad \underline{\hat{g}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\cdot\xi} g(\xi)\,d\xi}$$

(v)

Sei nun $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $\Big( (g,f) := \int g \bar{f}\,dx$

$\|f\| := (f,f)^{1/2} \Big)$

Versuch: $\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\cdot\xi} g(x)\,dx$ macht im allg. keinen Sinn, da Integral evtl. nicht exist.

z.B.: $g(x) = (1+|x|)^{-\frac{n+1}{2}}$

$\Rightarrow g \in L_2$, $\int |g|^2\,dx < \infty$

aber $\int |g|\,dx = \infty$

**Satz 2.1.: (Plancherel):**

Zu jedem $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ gibt es $\hat{g} \in L_2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\hat{T}_g = T_{\hat{g}} \quad \text{und} \quad \|g\| = \|\hat{g}\|.$$

Beweis: $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $g_k(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } |x| \le k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow g_k \in L_1(\mathbb{R}^n)$ :

$$\int |g_k|\,dx = \int_{|x|\le k} 1\cdot|g(x)|\,dx \overset{C.S.}{\le} \Big(\int_{|x|\le k} 1\,dx\Big)^{1/2} \underbrace{\Big(\int |g^2(x)|\,dx\Big)^{1/2}}_{g\in L^2\,:\,<\infty} < \infty$$

C.S.-Ungl.: $\int fg\,dx \le \left(\int f^2 dx\right)^{1/2}\left(\int g^2 dx\right)^{1/2}$

$$\| g_k - g_l \|^2 = \int (g_k - g_l)^2\,dx \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0$$

weil Integral $\int g^2 dx < \infty$

$\Rightarrow$ $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist C. Folge.

$\Rightarrow$ $g_k \longrightarrow g \in L_2$, da $L_2(\mathbb{R}^n)$ vollständig.

Sei $\hat{g}_k$ im Sinne von $L_1(\mathbb{R}^n)$

Parseval'sche Beziehung: $\|\hat{g}_k\| = \|g_k\|$

(gezeigt in $\mathcal{S}$, gilt aber auch ~~[illegible]~~ für die $g_k$)

$$\| \hat{g}_k - \hat{g}_l \| = \| g_k - g_l \| \xrightarrow[k,l\to\infty]{\text{s.o.}} 0 \quad ,(20)$$

$\Rightarrow (\hat{g}_k)_k$ ist C-Folge in $L_2(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow$ Da $L_2(\mathbb{R}^n)$ vollständig, existi. Fn. $\hat{g} \in L_2(\mathbb{R}^n)$ d.d.

$$\| \hat{g}_k - \hat{g} \| \to 0 \quad , k \to \infty$$

Es gilt für $\hat{g}$:

$$\hat{T}_g f = T_g \hat{f} = \int g \hat{f}\,d\xi = \lim_{k\to\infty} \int g_k \hat{f}\,d\xi \overset{\text{s. umseitig}}{=}$$

$$\overset{\text{Parseval}}{=} \lim_{k\to\infty} \int \hat{g}_k f\,d\xi = \int \hat{g} f\,d\xi = T_{\hat{g}} f .$$

$$\left( \left|\int (g-g_k)\hat{f}\,d\xi\right| \le \left(\int |g-g_k|^2\right)^{1/2} \left(\int |\hat{f}|^2\right)^{1/2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \right.$$

$$\underline{\underline{\|\hat{g}\|}} = \lim_{k\to\infty} \|\hat{g}_k\| = \lim_{k\to\infty} \|g_k\| = \underline{\underline{\|g\|}}$$

$\square$

($\Rightarrow$ Fourier-Trafo unitärer Operator auf $L_2$.)

**Bemerkung:** $\hat{g}_k(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{|x|\le k} e^{-ix\cdot\xi} g(x)\,dx$

nach Plancherel? normal FT

$\rightsquigarrow$ $\hat{g} = \underbrace{\lim_{k\to\infty} \hat{g}_k}_{\text{in } L_2(\mathbb{R}^n)!}$, d.h. $\int |\hat{g}-\hat{g}_k|^2\,d\xi \to 0$, $k\to\infty$

**Dafür schreibe:** $\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \underbrace{\int e^{-ix\cdot\xi} g(x)\,dx}_{\text{eigentlich (s.v.) ja nicht def.!}}$

Schreibweisen: PV, l.i.m., ...

Also $\hat{g}(\xi) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{|x|\le k} e^{-ix\cdot\xi} g(x)\,dx$

(Num. Bildanalyse 25.10.90)

## §3 Fourier-Reihen (Also: Entwicklung in orthogonales System von $L_2$!)

$$e^{ik\cdot x} \qquad k \in \mathbb{Z}^n \qquad\qquad e^{ik\cdot x} = e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)}$$

$$\int_{[0,2\pi]^n} e^{ik\cdot x}\, e^{-il\cdot x}\, dx = \int_{[0,2\pi]^n} e^{i(k-l)\cdot x}\, dx$$

$$= \prod_{\nu=1}^{n} \int_0^{2\pi} e^{i(k_\nu - l_\nu)x_\nu}\, dx_\nu = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ (2\pi)^n, & k = l \end{cases}$$

$$\underline{(f,g) = \int_{[0,2\pi]^n} f\bar{g}\, dx}, \quad \|f\| = (f,f)^{1/2}$$

$\underline{e^{ik\cdot x} \text{ paarweise orthogonal}}$, $\|e^{ikx}\| = (2\pi)^{n/2}$

in $\underline{L_2([0,2\pi]^n)}$ $\quad k \in \mathbb{Z}^n$:

$$\langle f, e^{ikx}\rangle = \underline{\hat{f}_k = (2\pi)^{-n} \int_{[0,2\pi]^n!} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx} \qquad \text{Fourier-Koeff.}$$

<u>Satz 3.1.</u>: $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und in allen Argumenten <u>$2\pi$-periodisch</u>.

Dann gilt:

$$\underline{f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{ik\cdot x} \underbrace{\hat{f}_k}_{\langle f, e^{ikx}\rangle}}$$

Entwicklung in das orthogonale System $\underset{k\in\mathbb{Z}^n}{\underline{e^{ik\cdot x}}}$!

mit gleichmäßiger Konvergenz. Außerdem gilt:

$$\underline{\|f\|^2 = (2\pi)^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\underbrace{\hat{f}_k}_{\text{Fourier-Koeff.!}}|^2}$$

<u>Beweis:</u> 1.) $n=1$:

$$\sum_{|k|<K} q^k = q^{-K+1} \sum_{k=0}^{2K-2} q^k \overset{\text{geom. Reihe}}{=}$$

$$= q^{-k+1}\,\frac{q^{2k-1}-1}{q-1} \qquad (q \neq 1)$$

$$= \frac{q^{K} - q^{-k+1}}{q-1}$$

$q = \cancel{e^{ikx}}\, e^{ix}$ : $\displaystyle\sum_{|k|<K} e^{ikx} = \frac{e^{iKx} - e^{-(K-1)ix}}{e^{ix}-1} =$

$$= \frac{e^{i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\,\frac{e^{i(K-\frac{1}{2})x} - e^{-i(K-\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{\sin(K-\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$$

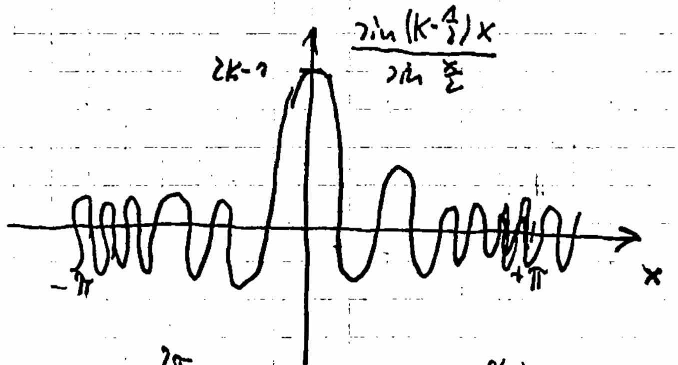
für $x \neq 0, \pm 2\pi, \dots$

nun: $\sin a = \dfrac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$

$\underline{n=1:}$ $\displaystyle\sum_{|k|<K} e^{ik\cdot x}\hat{f}_k = (2\pi)^{-n}\int_{[0,2\pi]} \sum_{|k|<K} e^{ik\cdot x - iky} f(y)\,dy =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y) \sum_{|k|<K} e^{ik(x-y)}\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\frac{\sin(K-\frac{1}{2})(x-y)}{\sin(\frac{x-y}{2})}\,dy$$




$$f(x)\cdot 1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{\sin(K-\frac{1}{2})(x-y)}{\sin\frac{x-y}{2}}}_{\sum_{|k|<K} e^{ik(x-y)}} f(x)\,dy$$

"Poisson'sches Kern"

$$\sum_{|k|<K} e^{ikx} \hat{f}_k - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(y)-f(x)) \frac{\sin(k-\frac{1}{2})(x-y)}{\sin\frac{x-y}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_x(y) \sin(k-\tfrac{1}{2})(x-y) dy$$

$$g_x(y) := \frac{f(y)-f(x)}{\sin\frac{x-y}{2}}$$

$$\Rightarrow g_x \in C^\infty$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{K-\frac{1}{2}} \left\{ -\int_0^{2\pi} g_x'(y) \cos(K-\tfrac{1}{2})(x-y) dy + \right.$$

$$\left. + \left[ g_x(y) \cos(K-\tfrac{1}{2})(x-y) \right]_{y=0}^{y=2\pi} \right\}$$

$$= O\left(\frac{1}{K}\right) \xrightarrow{K\to\infty} 0$$ glm. in $[0,2\pi)$ und damit in $\mathbb{R}^1$

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{ix\cdot k} \hat{f}_k$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (2\pi)^n |\hat{f}_k|^2$$ □

Verallgemeinerung des Satzes auf $L_2$!

<u>Bemerkung:</u> Sei $f \in L_2([0,2\pi]^n) = L_2$

Def. Operator $(I_K f) = \sum_{|k|\leq K} e^{ik\cdot x} \hat{f}_k$

$\| I_K f \| \leq (2\pi)^{n/2} \|f\|$ Bessel'sche Ungleichung

$I_K : L_2 \to L_2 \qquad \| I_K \| \leq (2\pi)^{n/2}$

Zu $f \in L_2$ gibt es Folge $(f_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}^n}$ von $2\pi$-periodischen

$C^\infty$-Fktn ~~bereit~~ mit $f_\ell \longrightarrow f$ in $L_2$, d.h.

$$\int_{[0,2\pi]^n} |f_\ell - f|^2 dx \to 0, \quad \ell \to \infty$$

$$\| I_k f - f \| \leq \| I_k f - I_k f_\ell \| + \| I_k f_\ell - f_\ell \| + \| f_\ell - f \|$$

$$\leq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \| f - f_\ell \| + \| I_k f_\ell - f_\ell \| + \| f_\ell - f \| \leq \varepsilon$$

falls $K$ hinreichend groß (s.u.)

$\ell$ so groß, daß:

$$\left[ (2\pi)^{\frac{n}{2}} + 1 \right] \| f - f_\ell \| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$K$ so groß, daß $\| I_k f_\ell - f_\ell \| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (geht, da $f_\ell$ periodisch, in $C^\infty$)

oder „Parseval"?

~~Plancherel~~: $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{ix \cdot k} \hat{f}_k$ im Sinne von $L_2([0,2\pi]^n)$

~~$f \in L_2$~~, $\|f\|^2 = (2\pi)^{n/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f_k|^2$

oben im Satz nur $C^\infty$!

Satz 3.2.: $g$ periodisch in $\mathbb{R}^n$ und lokal quadratisch integrierbar. $\in L^2_{loc}$

Dann gilt:

$$\hat{g} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{g}_k \, \delta_k \cdot (2\pi)^{n/2}$$

Beweis: $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{T}_g f = T_g \hat{f} = \int g \hat{f} \, d\xi = \int \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{g}_k e^{ik \cdot \xi} \hat{f}(\xi) \, d\xi =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{g}_k \int e^{ik \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{g}_k f(k)$$

$$\Rightarrow \hat{T}_g \overset{!!}{=} \hat{g} = (2\pi)^{n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{g}_k \, \delta_k \qquad \text{z.z.}$$

$\square$

<u>Satz 7.3.</u> (<u>Poisson'sche Formel</u>)

Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann gilt:

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi - 2\pi l) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f(l)\, e^{-i\xi\cdot l}$$

Insbesondere ist ($\xi = 0$)

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(2\pi l) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f(l)$$

Vorzeichen überfl., da $\mathbb{Z}^n$!

oder: $\quad Ш_{2\pi} \hat{f} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} Ш f$

also: $\hat{Ш}_{2\pi} = (2\pi)^{-n/2} Ш \leftarrow$ „Poisson'sche Formel" !

<u>Beweis:</u> $\quad g(\xi) = \sum_l \hat{f}(\xi - 2\pi l)$

$g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $2\pi$-periodisch in allen Argumenten

$$\hat{g}_k = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{[0,2\pi]^n} e^{-ik\cdot x} g(\xi)\, d\xi$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \underbrace{\int_{[0,2\pi]^n} \underbrace{e^{-ik\cdot\xi}}_{= e^{-ik(\xi - 2\pi l)}} \hat{f}(\xi - 2\pi l)\, d\xi}_{\int_{[0,2\pi]^n + 2\pi l} e^{-ik\cdot\xi'} \hat{f}(\xi')\, d\xi'}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\xi'} \hat{f}(\xi')\, d\xi' = f(-k)$$

Fourier-Reihe für $g$:

$$g(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} e^{i\xi \cdot l}\, \hat{g}_l = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} e^{i\xi\cdot l} f(-l) =$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi - 2\pi l)$$

$\square$

**Bemerkung:** $\sum_\ell \hat{f}(2\pi\ell) = (2\pi)^{-n/2} \sum_\ell f(\ell)$

$$\hat{f}(0) = (2\pi)^{-n/2} \sum_\ell f(\ell) - \sum_{\ell\neq 0} \hat{f}(2\pi\ell)$$

$$(2\pi)^{-n/2} \int f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int f(x)\,dx = \sum_\ell f(\ell) - (2\pi)^{n/2} \sum_{\ell\neq 0} \hat{f}(2\pi\ell)}$$

andere Schreibweise der Poisson'schen Formel (s.o.)

$f_h(x) = f(hx)$ : $(h>0)$

$$\int f(\underbrace{hx}_{x'})\,dx' = \sum_\ell f(h\ell) - (2\pi)^{n/2} h^{-n} \sum_{\ell\neq 0} \hat{f}(2\pi\ell/h)$$

$$\left( \hat{f}_h = h^{-n} (\hat{f})_{1/h} \right)$$

$$\rightarrow\ h^{n} \cdot h^{-n} \boxed{\int f(x')\,dx' = h^n \underbrace{\sum_\ell f(h\ell)}_{\text{Trapezregel}} - \underbrace{(2\pi)^{n/2} \sum_{\ell\neq 0} \hat{f}(2\pi\ell/h)}_{\text{Fehler der Trapezregel}}}$$

~~klein falls~~ $\hat{f}$

$\rightarrow$ Üb.aufg. 8

**Zu Satz 3.1.:** $(f,g) = (2\pi)^{n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}_k \hat{g}_k$

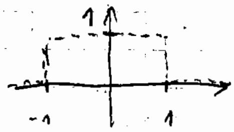
Parseval'sche Formel

# §4 Das Abtasttheorem von Shannon

**Def:** $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ heißt <u>bandbeschränkt mit Bandbreite b</u> (oder <u>b-bandbeschränkt</u>), falls $\hat{f}(\xi) = 0$ für $|\xi| \geq b$.
(d.h. außerhalb einer Kugel mit Radius b)

<u>Beispiele:</u> <u>$n=1$:</u>

1.) $$\chi(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$




$$\hat{\chi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-1}^{+1} e^{+ix\cdot\xi}\, dx = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, 2\, \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i\xi}$$

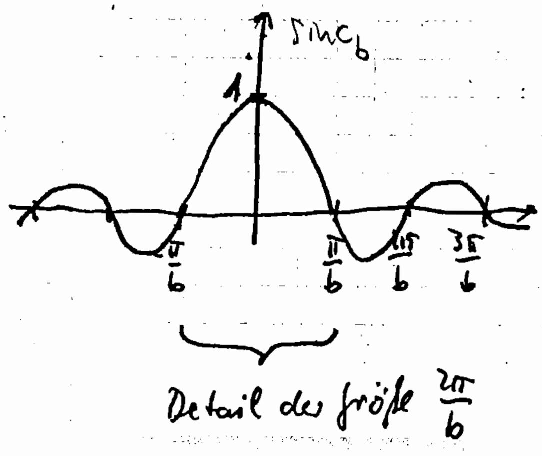
$$= 2(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin\xi}{\xi} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\xi}{\xi}$$

bezeichne: $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ (sprich: Sinkh)

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sinc}^\wedge = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \chi$$

sinc bandbeschr. mit Bandbreite 1.

$$(\operatorname{sinc}_b)^\wedge = b^{-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \chi_{1/b} \quad \text{hat Bandbreite } b$$

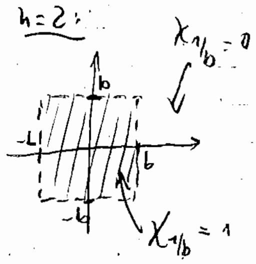


Für $x \in \mathbb{R}^n$:

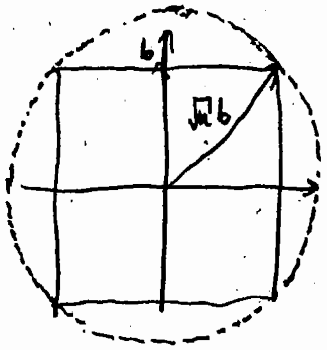
2.) $\underline{\underline{n \geq 1}}$: $\underline{\mathrm{sinc}(x)} := \mathrm{sinc}(x_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{sinc}(x_n)$

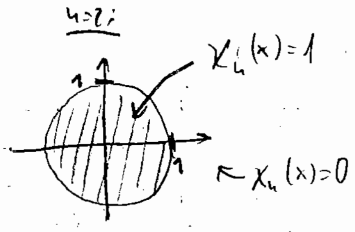
$$\hat{\mathrm{sinc}}_b = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2} b^{-n} \chi_{1/b}$$

$$\text{mit } \chi_{1/b}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-b,+b]^n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$




- Bandbreite $\sqrt{n}\, b$




3.) $$\chi_n(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Korrektur zu Aufg. 6</u>: $$\int_{S^{n-1}} e^{i\sigma\theta\omega}\, d\omega = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^{(2-n)/2} J_{\frac{n-2}{2}}(\sigma)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\rho) = \rho^{\frac{(2-n)}{2}} \int_0^\infty r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho)\, f(r)\, dr \,.$$

$$\tilde{\chi}_n(\xi) = |\xi|^{(2-n)/2} \int_0^1 r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(r|\xi|)\, dr$$

mit $$\int_0^z t^\nu J_{\nu-1}(t)\, dt = z^\nu J_\nu(z) \,, \quad \nu > 0$$ folgt:

$$\tilde{\chi}_n(\xi) = |\xi|^{(2-n)/2} \frac{1}{|\xi|} \int_0^{|\xi|} \left(\frac{r'}{|\xi|}\right) J_{\frac{(n-2)}{2}}(r')\, dr'$$

$$= |\xi|^{-n} \int_0^{|\xi|} r^{n/2} J_{\frac{n}{2}-1}(r)\, dr = |\xi|^{-n} |\xi|^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(|\xi|)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\tilde{\chi}_n(\xi) = \frac{J_{n/2}(|\xi|)}{|\xi|^{n/2}}}$$

$J_p$ Besselfunktion!

$\underline{n=2:}$ $\tilde{\chi}_2(\xi) = \underline{\frac{J_1(|\xi|)}{|\xi|}} =: \underline{\mathrm{Sinc}(\xi)}$ hat Bandbreite 1 in $\mathbb{R}^2$

wird im Folgenden aber nicht benötigt!?

## Satz 4.1. (Shannon)

Sei $f$ $b$-bandbeschränkt und $0 < h \leq \frac{\pi}{b}$. Dann ist $f$ eindeutig bestimmt durch die Werte $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, und es gilt:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{h}(x - hk)$$

$n$-dim. sinc-Fu.!, wie in Beispiel 2!

Sind $f$ und $g$ $b$-Bandbeschränkt, so gilt:

$$\int fg \, dx = h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk)\, g(hk)$$

**Bemerkung:** 1.) $h \leq \frac{\pi}{b}$ heißt Nyquist-Bedingung

$h < \frac{\pi}{b}$ : Oversampling (überabtasten)

$h > \frac{\pi}{b}$ : Undersampling (Unterabtasten)

2.) $\sin x = f(x)$

$\hat{f}(\xi) = c \cdot (\delta_1 - \delta_{-1})$, hat "Bandbreite 1"

$h = \pi$, $\sin(\pi k) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ nach obigem Satz (alle $f(hk) = 0$!!) ↯

$\Rightarrow$ Shannon ~~Satz~~ i.allg. so nicht richtig für Distributionen

**Satz 4.1. (Shannon)**

Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ $b$-bandbeschränkt und $h \le \frac{\pi}{b}$. Dann ist $f$ eindeutig bestimmt durch die Werte $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, und

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{h}(x - hk)$$

$$=: (S_h f)(x) \text{ "sinc-Reihe"} \qquad (\text{sinc} = \text{sinus cardinalis})$$

mit Konvergenz in $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Erfüllt $g$ die gleichen Voraussetzungen wie $f$, so ist

$$(f,g) = \int f \bar{g}\, dx$$

$$= h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk)\, \bar{g}(hk)$$

**Beweis:** Fourier-Reihen in $L_2([-a,a]^n)$:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_k\, e^{i\pi x \cdot k/a}$$

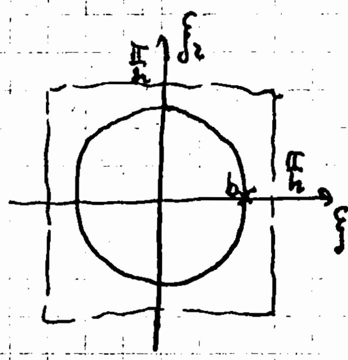
$$\hat{f}_k = (2a)^{-n} \int_{[a,a]^n} f(x)\, e^{-i\pi x \cdot k/a}$$

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k\, e^{i\pi \xi \cdot k/a},$$

$$f_k = (2a)^{-n} \int_{[-a,a]^n} \hat{f}(\xi)\, e^{-i\pi \xi \cdot k/a}\, d\xi$$

$n=2$:

$\frac{\pi}{h} \ge b$




$a = \frac{\pi}{h}$:

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k\, e^{ih\xi \cdot k}$$

$$f_k = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^{-n} \int_{[-\frac{\pi}{h},+\frac{\pi}{h}]^n} \hat{f}(\xi)\, e^{-ih\xi\cdot k}\, d\xi$$

$$\Rightarrow \quad f_k = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{-ih\xi\cdot k}\, d\xi \,,$$

weil $\hat{f}(\xi) = 0$ außerhalb $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n$

$$= h^n (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \hat{f}(\xi)\, e^{-ih\xi\cdot k}\, d\xi}_{f(-hk)}$$

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(+hk)\, e^{-ih\xi\cdot k} \qquad \Big| \cdot \chi_{\frac{h}{\pi}}(\xi)$$

in $L_2\left([-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n\right)$

$$\chi_{\frac{h}{\pi}}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{in } [-\frac{\pi}{h}, +\frac{\pi}{h}]^n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\, \chi_{\frac{h}{\pi}}(\xi)\, e^{-ih\xi\cdot k}$$

in $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Da $\sim$ (inverse Fouriertrafo) stetig in $L_2(\mathbb{R}^n)$:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk) \left[\chi_{\frac{h}{\pi}}\, e^{-ih\xi\cdot k}\right]^{\sim}(x)$$

$$(\operatorname{sinc}_{\frac{\pi}{h}})_{hk}(x) = \operatorname{sinc}_{\frac{\pi}{h}}(x+hk)$$
$$= \operatorname{sinc} \tfrac{\pi}{h}(x+hk)$$

$$\left[(\operatorname{sinc}_{\frac{\pi}{h}})_{-hk}\right]^{\wedge}(\xi) = e^{-ih\xi\cdot k}\,[\operatorname{sinc}_{\frac{\pi}{h}}]^{\wedge}(\xi)$$
$$= e^{-ih\xi\cdot k}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\tfrac{h}{\pi}\right)^{n}\chi_{\frac{h}{\pi}}(\xi)$$
$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,h^{n}\,e^{-ih\xi\cdot k}\,\chi_{\frac{h}{\pi}}(\xi)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\,\operatorname{sinc}\tfrac{\pi}{h}(x-hk) \quad \text{in } L_2(\mathbb{R}^n)}$$

$$(f,g) = \int f\bar{g}\,dx = \int \hat{f}\,\bar{\hat{g}}\,d\xi = \int_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n} \hat{f}\,\bar{\hat{g}}\,d\xi =$$

$$= \left(\tfrac{2\pi}{h}\right)^{n}\sum_k f_k\,\bar{g}_k$$

$$= \underbrace{\left(\tfrac{2\pi}{h}\right)^{n}\left[h^{n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\right]^{2}}_{=h^n}\sum_k f(hk)\,\bar{g}(hk)$$

$\square$

ist in fremde Trapezregel für $\hat{f}$ ?
„ $\int \dots d\xi$

**Korollar:** $$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,h^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\,e^{-ih\xi\cdot k},$$

d.h. Trapezregel für Fourier-Trafo ist exakt.

$$\underline{f_s(x)} = h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\, \delta(x-hk)$$

} Durch Sampeln erzeugte Diskretisierung!
erzeugt im Frequenzbereich periodische Fortsetzung! von $\hat f$

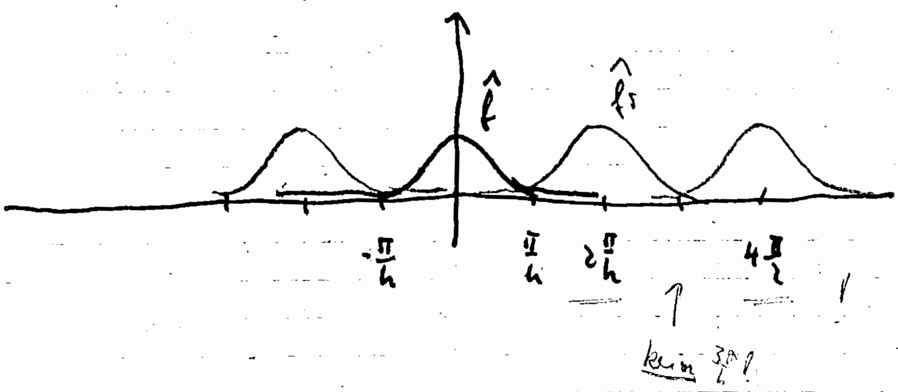
$$f_s := h^n f \,\text{Ш}_h$$

für allg. Gitter siehe S. 46!

**Satz 4.2.:** $$\underline{\hat f_s(\xi) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \hat f\left(\xi - \frac{2\pi}{h}\ell\right)}$$ !

$\to$ aliasing etc.

$\underline{n=1:}$




**Beweis:**
$$\hat f_s(\xi) = h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\, \hat\delta(\xi)\, e^{-ihk\cdot\xi}$$

$$= h^n (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\, e^{-ihk\cdot\xi}$$

Poisson'sche Formel (Satz 3.3.):

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \hat f(\xi - 2\pi\ell) \left( = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tilde f(k)\, e^{-ik\cdot\xi} \right)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\, e^{-ik\cdot\xi h}$$

wende Satz 3.3. auf $f_h$ an! $\square$

Wie unterscheiden sich $\hat f$ und $\hat f_s$?

37

i) $\hat f$, $\hat f_s$ unterscheiden sich vor allem außerhalb $[-\frac{\pi}{h}, +\frac{\pi}{h}]$ ⇐ wegen periodischer Fortsetzung vgl. Bild S. 36!

"Abschneiden" und dann inverse FT!

deshalb: $\left(\hat f_s \, \chi_{\frac{h}{\pi}}\right)^{\sim} \overset{(\text{z.z.})}{=} S_h f$ ← sinc-Reihe!

ideales Tiefpaß! Bes.!

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\, \operatorname{sinc} \tfrac{\pi}{h}(x-hk)$$

$= f(x)$, falls Nyquist-Bedgg. erfüllt!

**Beweis:** $\left(\hat f_s \, \chi_{\frac{h}{\pi}}\right)^{\sim} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \, f_s * \tilde\chi_{\frac{h}{\pi}}$

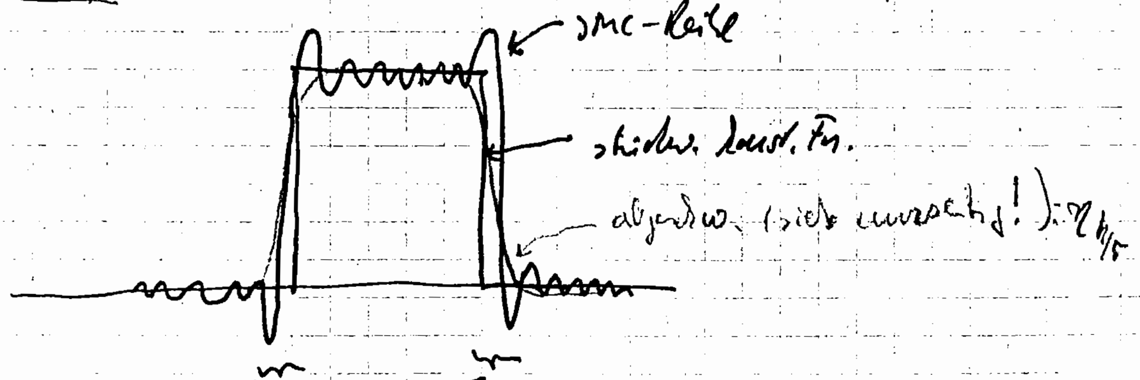
$$\left( \tilde\chi_{\frac{h}{\pi}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} h^{-n} \operatorname{sinc}_{\frac{\pi}{h}} \right)$$

$$\left(\hat f_s \chi_{\frac{h}{\pi}}\right)(x) \overset{!}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} f_s\left(\tilde\chi_{\frac{h}{\pi}}\right)^{\vee}_{-x} = \cancel{\#}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(h\cdot k)\, \tilde\chi_{\frac{h}{\pi}}(x-hk)$$

$$= \cancel{K}^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(h\cdot k)\, \operatorname{sinc} \tfrac{\pi}{h}(x-hk)$$

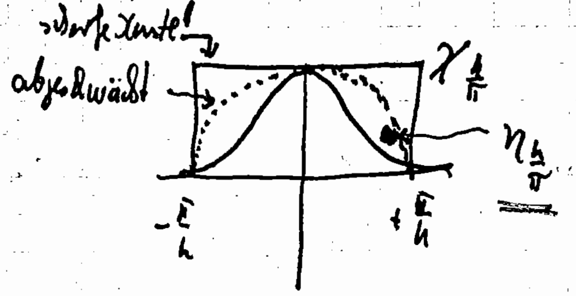
Durch abruptes Abschneiden kommen hohe Frequenzen mit ins Spiel:




Gibbs-Effekt, Hochfrequenz

Vermeidung des Gibbs-Eff.: Sanftes Abschneiden!

Trend:




} Sanftes Abschneiden

z.B.: $\eta_{\frac{h}{\pi}}(\xi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{h}{\pi}\,\xi\right)$ } statt $\chi_{\frac{h}{\pi}}$ in der Formel S.37 oben!

Wegen sanftem Abschneiden

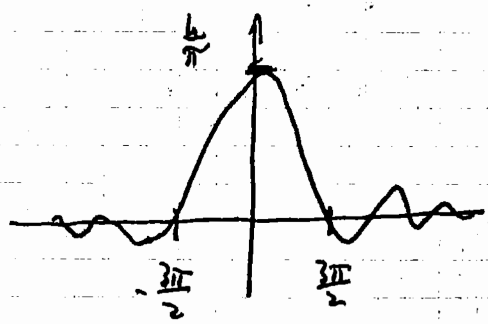
$\Rightarrow$ statt sinc-Reihe:

$$E_h f = \left(\hat{f} \cdot \eta_{\frac{h}{\pi}}\right)^{\vee}$$

} nicht exakte sinc-Reihe durch IFT, sondern ein anderer (ähnlicher) Ausdruck:

$$\ldots \Rightarrow (E_h f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(hk) \cdot ec\left(\frac{\pi}{h}(x-hk)\right)$$

mit $$ec(x) = \frac{\pi \cos x}{\frac{\pi^2}{4} - x^2}$$



Num. Bildver. (08.11.90)

$f$, $f(hk)$ bekannt, $k \in \mathbb{Z}^n$, $f$ ?

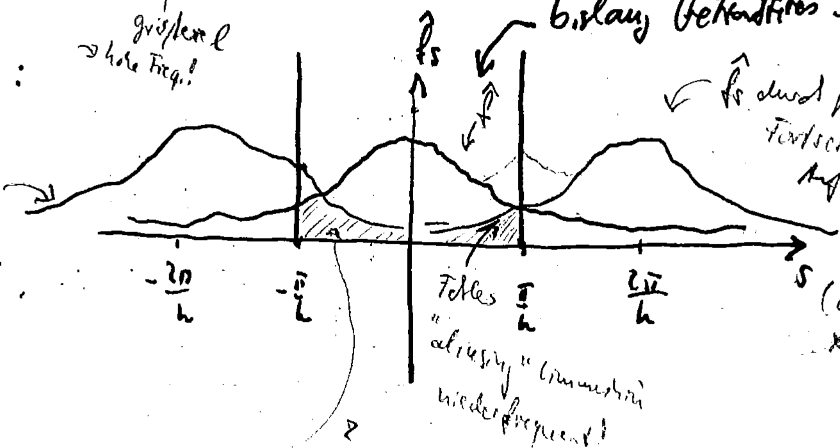
## Zwei Arten von Fehlern

1.) Hochfrequenter Fehler    (s.o., S.36!) Was ist der Unterschied zum aliasing?

$$\hat f_s(\xi) = \sum_{l} \hat f\left(\xi - \frac{2\pi}{h} l\right)$$

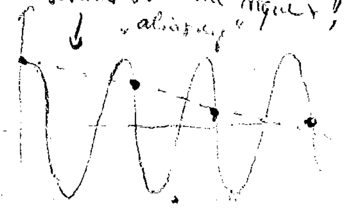
größere $l$ → hohe Freq.!

$|\xi| \geq \frac{\pi}{h}$ :




2.) Niederfrequenter Fehler

("aliasing", "fall over" - Fehler)




**Beispiel:** (n=2)

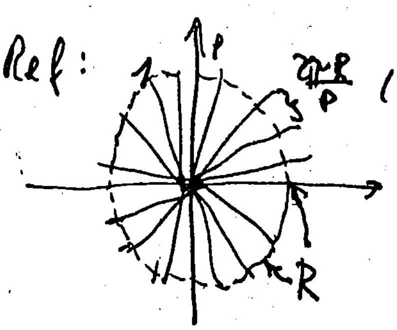
$$f(x) = \begin{cases} e^{-ip\varphi}, & |x| < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$x = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

Also: Fehlerhaftes Abtasten dieser hohen Frequenz erzeugt einen nicht vorhandenen niederfrequenten Anteil und verfälscht somit das niederfrequente Bild!

Deshalb: vorher alle zu hohen Frequenzen (Nyquist) rausschmeißen!

Ref:



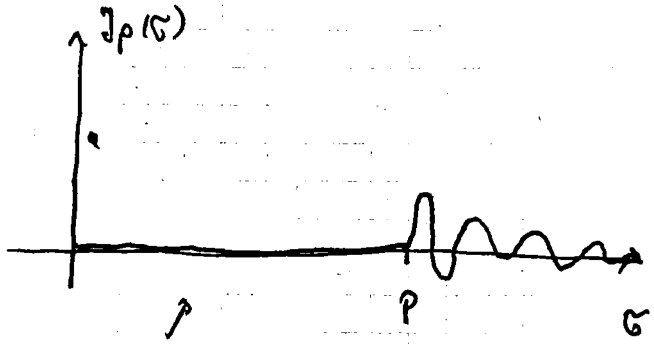

$$\hat f(\xi) = (2\pi)^{-1} \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx \qquad \xi = \rho\begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos(\varphi-\psi) + ip\varphi}\, r\,dr\,d\varphi$$

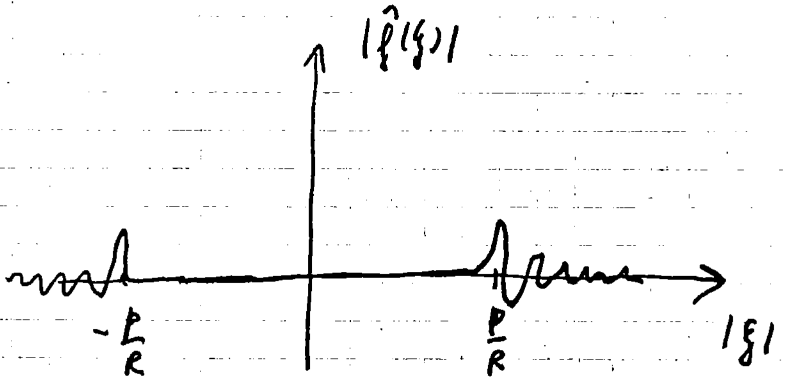
$$J_p(\sigma) = \frac{i^{-p}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\sigma\cos\varphi - ip\varphi}\,d\varphi \qquad \text{Bessel-fu.}$$

$$\rightsquigarrow \hat{f}(\xi) = i^p \int_0^R r\, J_p(-r\rho)\,dr\; e^{ip\psi} \quad \sim 0 \text{ falls } R\rho \le p-2$$

d.h. praktisch $|\xi| \le \frac{p}{R}$




praktisch $= 0$ für $\sigma < p-2$ und $p$ groß

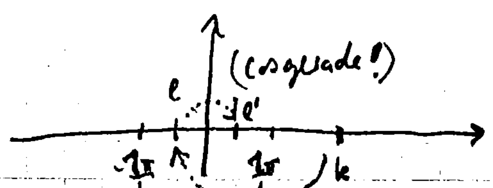



$\Rightarrow$ $f$ enthält keine Details $\le \frac{2\pi R}{p}$

## Heuristische Betrachtung des aliasing:

$\cos kx$, $\cos lx$ betrachte auf Gitter $h\cdot\mathbb{Z}$

ununterscheidbar, falls $k-l = \frac{2\pi}{h}$ oder Vielfache davon




Nur möglich, falls $k$ oder $l$ außerhalb $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$

Falls $|k|, |l| < \frac{\pi}{h}$, sind $\cos kx, \cos lx$ auf $h\mathbb{Z}$ unterscheidbar

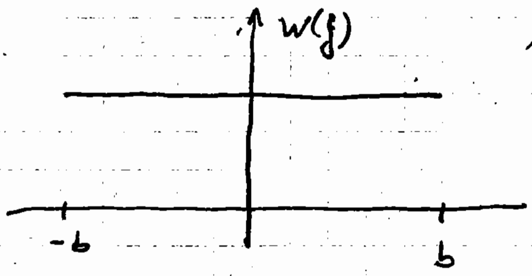
ist also gerade Nyquist-Bedingung.

<u>Vermeidung von aliasing:</u> "Erst Filtern, dann Sampeln".

Filtern: $f \longrightarrow (\underset{\uparrow}{w}\hat{f})^\sim$

Filter

<u>Falls: $w(\xi) = 0$ für $|\xi| > b$, dann $(w\hat{f})^\sim$ wieder $b$-bandbeschr.</u>




"Idealer Tiefpaß" (d.h.: niedrige Frequenzen dürfen passieren, hohe nicht)

Es muß <u>analog</u> gefiltert werden, sonst trotzdem Diskretisierungsfehler (z.B. <u>nicht</u> digital filtern?)

$$(w\hat{f})^\sim = (2\pi)^{-n/2}\, \hat{w} * f$$

<u>Satz 2.2:</u> (<u>Faltungssatz</u>):

Sei $f \in \mathcal{S}$, $T \in \mathcal{S}'$. Dann:

a.) $\widehat{f * T} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \hat{f}\, \hat{T}$ → letzte Üb.aufg. des Teiles

b.) $\widehat{fT} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, \hat{f} * \hat{T}$

<u>Beweis:</u> Yosida

ist der Fehler, falls trotz Unterabtastens die sinc-Reihe für $f$ berechnet wird!
{Nat, S.57?}

**Satz 4.3.:** Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann gilt:

$$\underbrace{\left| (S_h f - f)(x) \right|}_{=0,\text{ d.h. exakt, falls Shannon erfüllt! sonst:}} \leq 2 (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} |\hat{f}(\xi)| \, d\xi$$

Dieses Integral ist gleich 0, falls $|\hat{f}(\xi)| = 0 \; \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus [\;]$! (→ Nyquist-Bed.!)

**Beweis:**

$$(S_h f)^{\wedge} \overset{\text{vgl. 5.37?}}{=} \hat{f}_s \, \chi_{\frac{h}{\pi}}$$

$$= \chi_{\frac{h}{\pi}} \sum_{\ell} \hat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h} \ell\right) = \chi_{\frac{h}{\pi}} \hat{f}(\xi) + \chi_{\frac{h}{\pi}} \hat{a}$$

$$\hat{a} = \sum_{\ell \neq 0} \hat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h} \ell\right)$$

$$\Rightarrow (S_h f - f)^{\wedge} = \left(\chi_{\frac{h}{\pi}} - 1\right) \hat{f} + \chi_{\frac{h}{\pi}} \hat{a}$$

} d.h. hier stehen alle nieder- (aliasing) und hochfrequenten Fehler drin!

$$\Rightarrow (S_h f - f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\cdot\xi} \left\{ \left(\chi_{\frac{h}{\pi}} - 1\right) \hat{f} + \chi_{\frac{h}{\pi}} \hat{a} \right\} d\xi$$

$$\int_{[-\frac{\pi}{h}, +\frac{\pi}{h}]^n} e^{ix\cdot\xi} \, \hat{a}(\xi) \, d\xi = \int_{[-\frac{\pi}{h}, +\frac{\pi}{h}]} e^{ix\cdot\xi} \sum_{\ell \neq 0} \hat{f}(\underbrace{\xi - \tfrac{2\pi}{h} \ell}_{\xi'}) \, d\xi$$

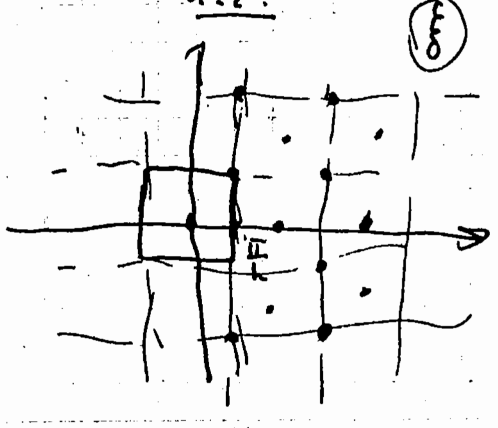
$$= \sum_{\ell \neq 0} \int_{[-\frac{\pi}{h}, +\frac{\pi}{h}]^n - \frac{2\pi}{h}\ell} e^{ix(\xi' + \frac{2\pi}{h}\ell)} \hat{f}(\xi') \, d\xi'$$

Würfel verschoben!

$$\leq \sum_{\ell \neq 0} \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}] - \frac{2\pi}{h}\ell} |\hat{f}(\xi)| \, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \setminus [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} |\hat{f}(\xi)| \, d\xi$$

$n = 2$:



$$\Rightarrow |(S_h f - f)(x)| \leq 2\cdot(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi$$ $\square$

**Satz 4.4.:** $f, g \in \mathcal{S}$ [Nat, S. 58 oben]

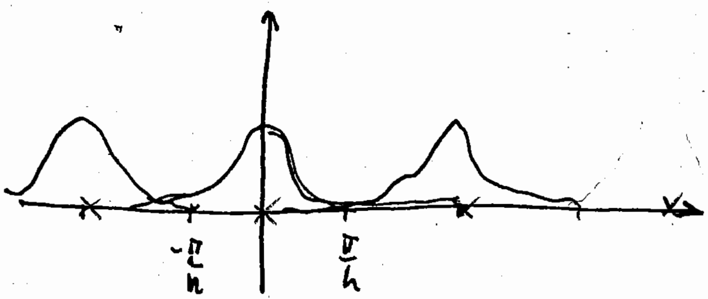
$$\underline{(f \overset{h}{*} g)(x)} = h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x - hk)\, g(hk)$$

Faltung + Trapezregel
"diskret gefaltet"

$$\underline{(f \overset{h}{*} g - f * g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)\, (2\pi)^{n/2} \sum_{\ell \neq 0} \hat{g}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}\ell\right)}$$

also Abweichung nur allein außerhalb!
(→ pr. Tests. !?)

vgl. Anwendung bei gefilterter Rückproj.!




**Beweis:** $$(f \overset{h}{*} g)^\wedge(\xi) = \underbrace{h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(hk)\, e^{-ihk\cdot\xi}}\; \hat{f}(\xi)$$

Poisson'sche Formel:

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \hat{g}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}\ell\right) \hat{f}(\xi)$$

$$= \underbrace{(2\pi)^{n/2}\, \hat{g}(\xi)\, \hat{f}(\xi)} + (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \cdot \sum_{\ell \neq 0} \hat{g}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}\ell\right)$$

$$= (g * f)^\wedge(\xi) + \ldots$$ $\square$

( Num. 6.Vdl. 12.11.90 )

## §5 Das Abtasttheorem von Petersen-Middleton

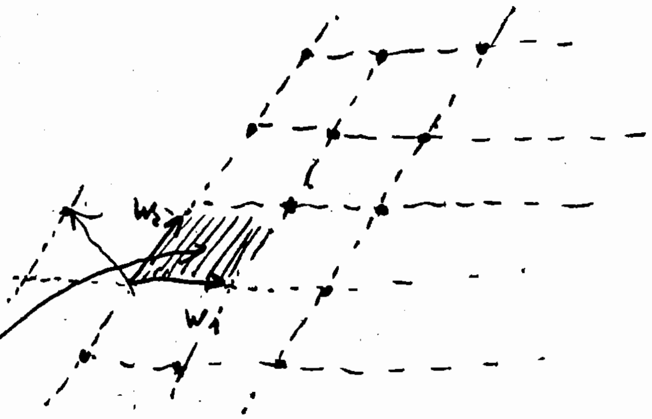
<u>(5.1) Def:</u> Sei $W$ eine $(n,n)$-Matrix mit Elementen aus $\mathbb{R}$, $W$ sei nicht singulär. Dann heißt

$$\underline{L} := \{x \in \mathbb{R}^n : x = Wl,\ l \in \mathbb{Z}^n\} = \underline{W\mathbb{Z}^n}$$

ein <u>(von $W$ erzeugtes) Gitter</u>.

<u>Beispiel:</u> $n = 2$, $W = (w_1, w_2)$

$l_1 w_1 + l_2 w_2$




Fundamentalbereich von $L$ $= W[0,1)^n$

$( = \mathbb{R}^n/L$ → Gruppentheorie )

<u>Lemma:</u> $L_1 = W_1\mathbb{Z}^n$, $L_2 = W_2\mathbb{Z}^n$ Gitter, sei $L_1 = L_2$. Dann gibt es eine ganze Matrix $\mathcal{U}$ mit $\det(\mathcal{U}) = \pm 1$, so daß
$W_1 = W_2\,\mathcal{U}$

<u>Beweis:</u> $\forall l_1\ \exists l_2 : W_1 l_1 = W_2 l_2$

$l_2 = \underbrace{W_2^{-1} W_1}_{=:\mathcal{U}} l_1 \quad \Rightarrow \mathcal{U}$ ganz (d.h. Koeff. $\in \mathbb{Z}$)

$\mathcal{U}^{-1}$ muß ~~g~~ auch ganz sein (aus Symm. gründen)

$\Rightarrow \det(\mathcal{U}), \det(\mathcal{U}^{-1})$ sind ganze Zahlen wegen $\det(U) = [\det(U^{-1})]^{-1} \Rightarrow \det U = \pm 1$

□

<u>Folgerung:</u> $|\det(W)|$ ist invariant unter der Darstellung des Gitters

$\parallel$

<u>$\det(L)$</u> falls $L = W\mathbb{Z}^n$

<u>Def 5.2.:</u> $\hat{L} = 2\pi (W^{-1})^T \mathbb{Z}^n =: 2\pi (W^{-T}) \mathbb{Z}^n$

transponiert

heißt <u>reziprokes (od. duales) Gitter.</u>

<u>Bemerkung:</u> Def. sinnvoll:

denn: sei $\det(U) = \pm 1$, $U$ ganz $\Rightarrow$

$2\pi \left( (WU)^{-1} \right)^T \mathbb{Z}^n$

$= 2\pi (U^{-1} W^{-1})^T \mathbb{Z}^n = 2\pi\ W^{-T} \underbrace{U^{-T}}_{\text{ganz, det} \pm 1} \mathbb{Z}^n$

erzeugt dasselbe Gitter.

<u>Volumen des Fundamentalbereiches: $\det(L)$</u>

<u>Satz 5.1.:</u> (<u>Poissonsche Formel</u>):

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$= 1$ für $L = [0,1]^n$! vgl. 5.27!

$$\sum_{\eta \in \hat{L}} \hat{f}(\underset{\text{fest}}{\xi} - \eta) = \det(L)\, (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{x \in L} f(x)\, e^{-i \xi \cdot x}$$

fest!

(vgl. 5.27 für $W = \mathbb{1}$!)

z.B. $\xi = 0$!

(Falls $L = \mathbb{Z}^n$: siehe Satz 3.3).

<u>Beweis:</u> $f_W(x) = f(Wx)$.

Aufg. 7: $\hat{f}_W(W^T\xi) = \frac{1}{|\det(W)|}\hat{f}(\xi)$, $\quad W^T\xi = \xi'$

$$\hat{f}_W(\xi') = \frac{1}{\det(L)}\hat{f}(W^{-T}\xi')$$

Satz 3.3 $\Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}_W(\xi - 2\pi k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_W(k)e^{-i\xi\cdot k}$

$L = \mathbb{Z}^n \Rightarrow \hat{L} = 2\pi\mathbb{Z}^n$

$$\Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}(W^{-T}(\xi - 2\pi k)) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\det(L)\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(Wk)e^{-i\xi\cdot k}$$

setze $W^{-T}\xi = \xi'$

$$\Rightarrow \sum_{\eta\in\hat{L}}\hat{f}(\xi' - \eta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\det(L)\sum_{x\in L} f(x)e^{-iW^T\xi'\cdot k}$$

wegen $W^T\xi'\cdot k = \xi'\cdot Wk = \xi'\cdot x$ folgt die Beh. $\square$

<u>Im Ortsbereich:</u>

<u>Def:</u> $\underline{Ш_L f} := \sum_{x\in L} f(x)$, } vgl. $Ш_h f_s$ auf S. 36!

$\underline{f_L} := \det(L)\, f\, Ш_L$ ← ist Distr.!

↖ <u>also: Ablasten auf dem Gitter $L$!</u>

$\Big[\ \sum_{\eta\in\hat{L}}\hat{f}(+\eta) = \det(L)(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{x\in L} f(x)$, d.h.:

$$Ш_{\hat{L}}\hat{f} = \det(L)(2\pi)^{-\frac{n}{2}}Ш_L f$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\widehat{Ш}_{\hat{L}} = \det(L)\,(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,Ш_L} \qquad ]$$

Ergibt im Frequenzbereich:

**Satz 5.2.:** $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\underline{(f_L)^\wedge(\xi) = \sum_{\eta \in \hat{L}} \hat{f}(\xi - \eta)}$$

s.o.: Periodisches Fortsetzen von $\hat{f}$ durch diskretes Abtasten!

vgl. S 36!

**Beweis:**

$$(f_L)^\wedge = \det(L)\,(f\,Ш_L)^\wedge$$

$$\overset{\text{Satz 2.2.}}{=} \det(L)\,(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,\widehat{Ш}_L * \hat{f}$$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} Ш_{\hat{L}} * \hat{f}$$

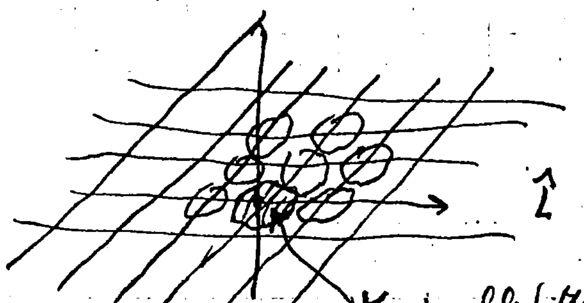
$$(f_L)^\wedge(\xi) = Ш_{\hat{L}}\ \check{\hat{f}}_{-\xi}$$

$$= \sum_{\eta \in \hat{L}} \check{\hat{f}}(\eta - \xi) = \sum_{\eta \in \hat{L}} \hat{f}(\xi - \eta) \qquad \square$$

**Satz 5.3.:** (Abtasttheorem von Petersen - Middleton):

Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. ~~Dann~~ $\hat{f}(\xi) = 0$ außerhalb einer Menge $K \subset \mathbb{R}^n$.
Es seien die Mengen $\mathring{K} + \eta$, $\eta \in \hat{L}$, paarweise ~~verschieden~~ disjunkt.
Dann ist $f$ eindeutig bestimmt durch seine Werte auf $L$.

**Beweis:** 1.) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\hat{f} = (f_L)^\wedge$ in $K$




$K$: [illegible]

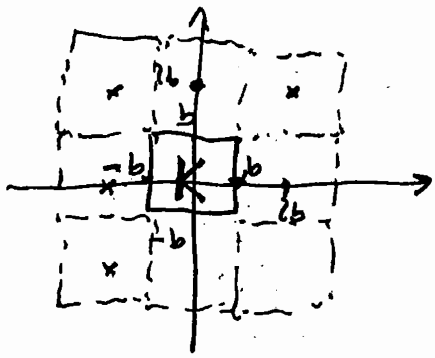
$$\hat{f} = (f_L)^\wedge \text{ in } K$$
$$= 0 \text{ außerhalb } K$$

2.) $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ : wie bei Shannon

**Beispiele:** 1.) $K = [-b,+b]^n$, $L = h\,\mathbb{Z}^n$ ⇒ Shannon?

$h = \frac{\pi}{b}$ , $\hat{L} = 2\pi \frac{b}{\pi} \mathbb{Z}^n$

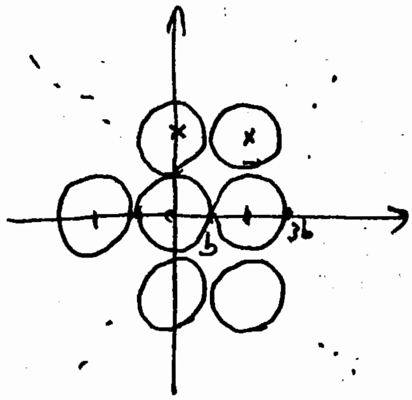
$= 2b\,\mathbb{Z}^n$




2.) $K = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \le b \}$ , L wie in 1.)!

(V)

„Abtasttheorem erfüllt!"



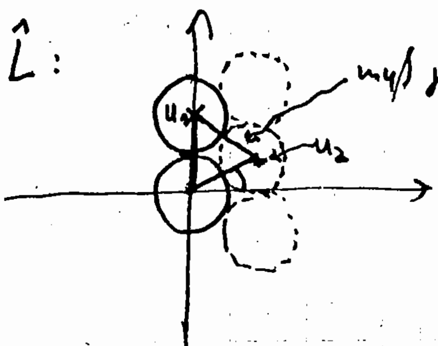

3.) K wie in 2.) $\qquad 2\pi W^{-T} = (u_1, u_2)$

wie kann $\hat{L}$ (und damit L) „effizienter" gewählt werden?

$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b \end{pmatrix}$

vgl. S. 74 in Nat 3

$\hat{L}$:




muß gleichseitiges Dreieck sein!

$$u_2 = 2b \begin{pmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi W^{-T} = \cancel{2\pi}\, b \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi W^{-1} = \cancel{2\pi}\, b \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

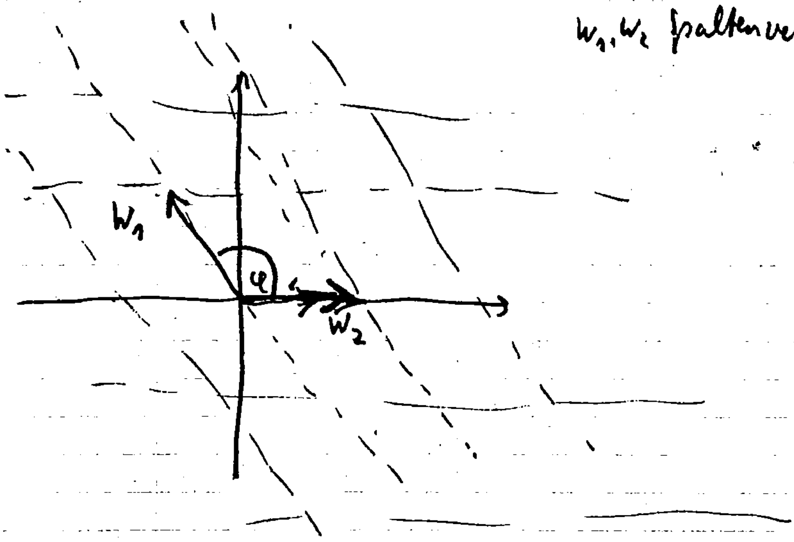
$$\Rightarrow \quad W = \frac{\pi}{b} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos\varphi = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{\|w_1\| \, \|w_2\|} = \frac{-2/3}{4/3} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \varphi = 120°$

$w_1, w_2$ Spaltenvektoren von $W$

$L$:

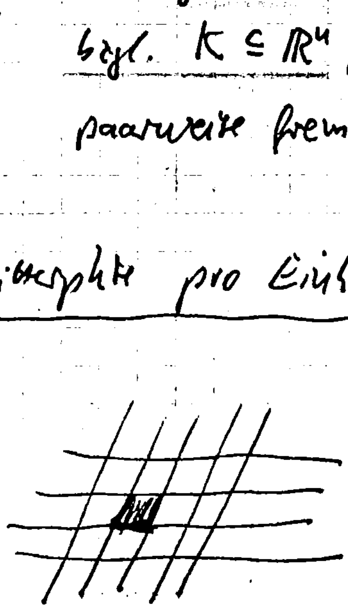



Beispiele aus der CT vgl. S. 146! Dort aber FT auf $\mathbb{C}^2$! Kompliziertere Struktur!

## Effizienz von Gittern:

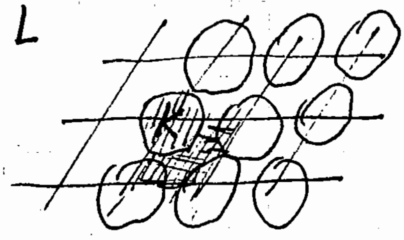
**Def. 5.3.:** Ein Gitter $L$ erfüllt die Nyquist-Bedingung bzgl. $K \subseteq \mathbb{R}^n$, falls die Mengen $\mathring{K} + \eta$, $\eta \in \hat{L}$ paarweise fremd (disjunkt!) sind.

\# Gitterpkte pro Einheitsvolumen?: $\frac{1}{\det(L)}$



(falls Fundamentalbereich sehr klein gegenüber Einh.vol.)

$\hat{L}$




Betrachte: $\dfrac{Vol(K)}{Vol(\text{Fund.bereich})}$

Effizienz: $\dfrac{1}{\det(L)}$ möglichst klein

$$\det(\hat{L}) = |\det(2\pi W^T)| = (2\pi)^n \frac{1}{|\det(W)|}$$

$$= (2\pi)^n \frac{1}{\det(L)}$$

also $\boxed{\dfrac{Vol(K)}{\det(\hat{L})} =: \underbrace{\underline{\eta(L,K)}}_{=: \text{"Effizienz von } L \text{ bzgl. } K\text{"}} \text{ möglichst groß}}$

Maximale Effizienz: $\eta = 1$ !

(weil aus Nyquist-Bedgg. folgt, daß $Vol(K) \leq \det(\hat{L})$ )

Beispiele: 1.) $K = [-b,b]^n$, $L = h\mathbb{Z}^n$, $h = \frac{\pi}{b}$

(wie oben!)

$Vol(K) = \det(\hat{L}) \Rightarrow \underline{\eta(L,K) = 1}$

$\Rightarrow$ $L$ maximal effizient für dieses $K$!

2.) $K = \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| < b\}$, $L$ wie in 1.)

$$\eta(L,K) = \frac{b^n \omega_n}{(2b)^n}, \quad \omega_n = \text{Vol. der } n\text{-dim. Einheitskugel}$$

$\underline{n=1:}$ $\quad \eta = 1$

$\underline{n=2:}$ $\quad \eta = \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{0{,}785}}$

3.) $\underline{n=2:}$

$$\eta(L, K) = \frac{\pi b^2}{2\sqrt{3}\, b^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \underline{\underline{0{,}907}}$$

Also: für $n=2$ ist das $L$ aus Bsp. 3.) <u>effizienter</u> als das $L$ aus Bsp. 2.)!

(Num. Bildv. 15.11.90)

Nyquist-Bedgg.: $\mathring{K}+\eta$, $\eta \in \hat{L}$ paarweise fremd
$\Leftrightarrow$ Gitterpackung von $K$

$\eta(L,K)$ Dichte der Gitterpackung

(Lit.: Erdös, Pidal.: Lattice points
Verlag Longman, New York 1989)

<u>Beispiele:</u> 3.) $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < b\}$

$L$:


$\hat{=}$ Hexagonalem Gitter.

4.) $K = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| < b\}$

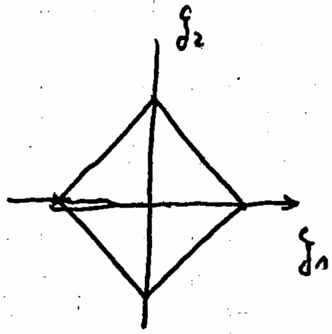
Effizienz des kartes. Gitters! — max. mögliche Effizienz?

| | $\eta_{cartes.}$ | $\eta_{effiz.}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0.785 | 0.907 |
| 3 | 0.524 | 0.742 |
| 4 | 0.308 | 0.617 |
| 5 | 0.165 | 0.466 |
| 6 | 0.081 | 0.373 |
| 7 | 0.037 | 0.295 |
| 8 | 0.005 | 0.081 |

für Anwendungen interessant → (3, 4, 5)

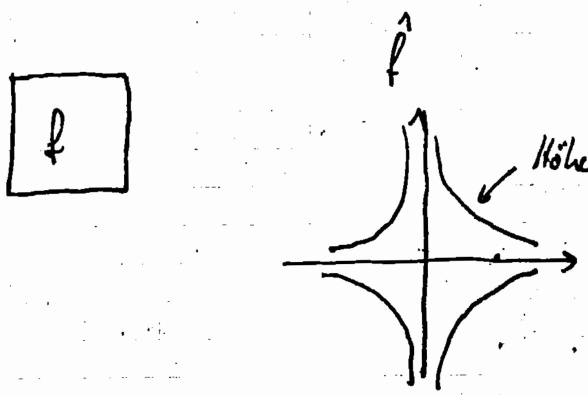
$n=3$: $\eta_{cart}(L,K) = \dfrac{\frac{4}{3}\pi b^3}{(2b)^3} = \dfrac{|K|}{\det(\hat{L})} = \dfrac{\pi}{6} = 0.524$

5.) (Aufg. 16.):




$f$ = char. Fn. des Einheitsquadrates

$$\hat{f}(\xi) = c \cdot \operatorname{sinc}(\xi) = c \,\frac{\sin \xi_1}{\xi_1}\,\frac{\sin \xi_2}{\xi_2}$$




## Verallgemeinerte sinc - Fkcn für bel. Gitter:

$$\underline{\chi_K(x)} = \begin{cases} 1, & x \in K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{\operatorname{sinc}_{L,K}} = \underbrace{\det(L)}_{\to L} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \underbrace{\tilde{\chi}_K}_{\to K}$$

$$\underline{S_{L,K} f} = \sum_{y \in L} f(y) \operatorname{sinc}_{L,K}(x-y)$$ ← sinc-Reihe für bel. Gitter!

$$(S_{L,K} f)^\wedge(\xi) = \sum_{y \in L} f(y)\, e^{-iy\cdot\xi} \det(L)(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \chi_K(\xi)$$

Poisson'sche Formel $= \chi_K(\xi) \sum_{\eta \in \hat{L}} \hat{f}(\xi - \eta) = (\hat{f}_L \chi_K)(\xi)$

$$\Rightarrow \underline{(S_{L,K} f)^\wedge = \hat{f}_L \chi_K} \qquad \text{(vgl. 5.37 für } W = \mathbb{1}!)$$

**Satz 5.4.** $f \in \mathcal{S}$, $L$ erfüllt Nyquist-Bedingung bzgl. $K$.
Dann gilt:

$$|(S_{L,K} f - f)(x)| \leq 2 (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |\hat{f}(\xi)| \, d\xi$$

$^e$(Fehler bei Unterabtasten für bel. Gitter, vgl. 5.42 für $W = \mathbb{1}$!)

**Beweis:**

$$(S_{L,K} f)^\wedge(\xi) = (\hat{f}_L \chi_K)(\xi) =$$

$$= \chi_K(\xi) \sum_{\eta \in \hat{L}} \hat{f}(\xi - \eta) =$$

$$= \chi_K(\xi) \hat{f}(\xi) + \chi_K(\xi) \sum_{\substack{\eta \in \hat{L} \\ \eta \neq 0}} \hat{f}(\xi - \eta)$$

(K muß nicht mehr zus. hängend sein!)

$$\Rightarrow (S_{L,K} f - f)^\wedge(\xi) = (\chi_K(\xi) - 1) \hat{f}(\xi) + \chi_K(\xi) \sum_{\substack{\eta \in \hat{L} \\ \eta \neq 0}} \hat{f}(\xi - \eta)$$

$$\Rightarrow (S_{L,K} f - f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \Big\{ e^{ix\xi} (\chi_K - 1) \hat{f} + \chi_K \sum_{\substack{\eta \in \hat{L} \\ \eta \neq 0}} \hat{f}(\xi - \eta) \Big\} \, d\xi$$

$$\Rightarrow | \ldots | \leq (2\pi)^{-n/2} \Big( \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |\hat{f}(\xi)| \, d\xi + \underbrace{\int_K \Big| \sum_{\substack{\eta \in \hat{L} \\ \eta \neq 0}} \hat{f}(\xi - \eta) \Big| \, d\xi}_{\leq \sum_{\substack{\eta \in \hat{L} \\ \eta \neq 0}} \int_{K - \eta} |\hat{f}(\xi')| \, d\xi'} \Big)$$

$\xi - \eta = \xi'$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |\hat{f}(\xi')|\, d\xi' \quad \Big\}\ \text{wegen Nyquist-Bedgg.}$$

$\Rightarrow$ Beh.

$\square$

<u>Satz 5.5.:</u> Sei $f, g \in \mathcal{S}$, $\underline{f \overset{L}{*} g\,(x)} := \det(L) \sum_{y \in L} f(x-y)\, g(y)$

Dann gilt:

$$\underline{\left(f \overset{L}{*} g - f * g\right)^\wedge(\xi)} = (2\pi)^{n/2}\, \hat{f}(\xi) \sum_{\substack{\eta \in \hat{L} \\ \eta \neq 0}} \hat{g}(\xi - \eta)$$

(vgl. 5.4.3 für $W = \mathbb{1}$!)

<u>Beweis:</u>

$$(f \overset{L}{*} g)^\wedge(\xi) = \cancel{(2\pi)^{-n/2}} \det(L) \sum_{y \in L} e^{-iy\cdot\xi}\, \hat{f}(\xi)\, g(y)$$

$$= \hat{f}(\xi) \sum_{\eta \in \hat{L}} \hat{g}(\xi - \eta) \cdot (2\pi)^{n/2}$$

$$= \underbrace{(2\pi)^{n/2}\, \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)}_{(f*g)^\wedge(\xi)} + (2\pi)^{n/2}\, \hat{f}(\xi) \sum_{\substack{\eta \in \hat{L} \\ \eta \neq 0}} \hat{g}(\xi - \eta)$$

$\square$

# §6 Die diskrete Fourier-Transformation (n-dim!)

$$\hat{y}_k = p^{-n} \sum_{\underbrace{0 \le j < p}_{\text{komp.weise!}}} e^{-2\pi i j\cdot k/p} \, y_j \qquad \underline{(\text{diskr. F.T.})}$$

$$j = (j_1, \dots, j_n) \qquad\qquad j \cdot k = \sum_{l=1}^{n} j_l k_l$$
$$k = (k_1, \dots, k_n)$$

$$\tilde{y}_k = \sum_{0 \le j < p} e^{2\pi i j\cdot k/p} \, y_j \qquad \underline{(\text{inverse diskr. F.T.})}$$

<u>n-dim. diskrete F.T der Länge p</u>

<u>n = 2:</u> $k = (k_1, k_2)$, $j = (j_1, j_2)$

$$y_{k_1,k_2} = \frac{1}{p^2} \sum_{j_1=0}^{p-1} \sum_{j_2=0}^{p-1} e^{-2\pi i (j_1 k_1 + j_2 k_2)/p} \, y_{j_1,j_2} =$$

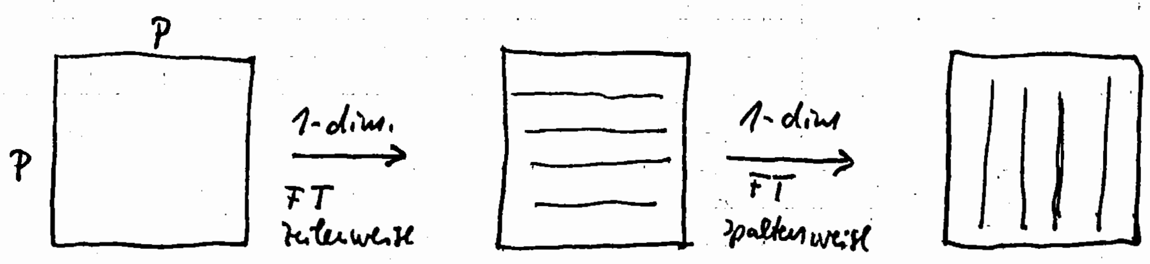
$$= \frac{1}{p} \sum_{j_1=0}^{p-1} e^{-2\pi i j_1 k_1/p} \underbrace{\underbrace{\frac{1}{p} \sum_{j_2=0}^{p-1} e^{-2\pi i j_2 k_2/p} \, y_{j_1,j_2}}_{\forall j_1 = 0,\dots,p-1 \text{ je eine } \underline{\text{1-dim. FT der Länge p}}!}}_{\text{ergibt } \hat{y}_{j_1,k_2} \ \underline{\forall j_1}}$$

$\Rightarrow$ n-dim FFT durch Hintereinanderschalten 1-dim FFT!

<u>FFT</u> = schnelle FT = Algorithmus zur 1-dim FT mit <u>p log p</u> Operationen.

! FFT für <u>n-dim FT</u> der Länge p: <u>$p^n \log p$ RO.</u> !

<u>nicht</u> $(p \log p)^n$!




## Diskrete Faltung: (n-dim)?

$$z_k = \sum_{0 \le l < p} w_{k-l}\, y_l \quad , \; 0 \le k < p \qquad \text{Länge } p$$

$0 \le l < p$ kompon. weise!

Schreibe: $z = w * y$

Zyklische Faltung: $\quad w_{k+pe_i} = w_k \quad$ Also: mod $p$.

$i = 1, \dots, n$, $e_i$ i-ter Einheitsvektor

(d.h. in jeder Komponente separat $p$-periodisch)

**Bem.** Für zyklische Faltungen [illegible] gilt:

$$(w*y)^\wedge_k = p^n \, \hat{w}_k \, \hat{y}_k \qquad \text{(o. Bew.)}$$

⇒ zyklische ! Schnelle Faltung:

$$y \xrightarrow[p^n \log p]{FFT} \hat{y} \longrightarrow \hat{w}\,\hat{y} \xrightarrow[(s.o.)]{\cdot p^n} (w*y)^\wedge \xrightarrow[p^n \log p]{FFT} w*y$$

$p^n \log p$ Operationen.

Dieser Schritt funktioniert nur für zyklische Faltungen! (und diese Bemerkung!)
Allgemein: Setze periodisch fort (s.u.!)

Diskrete Faltung: (der Länge p)

$$z_k = \sum_{0 \le l < p} w_{k-l}\, y_l \qquad 0 \le k < p \;:\; z = w * y$$

Zyklische Faltung: (der Länge p)

falls $w_{k+p} = w_k$ d.h. $w$ hat die Periode $p$.

Behauptung: (Satz)

Für zyklische Faltungen der Länge p gilt:

$$\widehat{(w * y)}_k = p^n \hat{w}_k \hat{y}_k$$

Schnelle Faltung (zyklisch):

$$y \xrightarrow{FFT} \hat{w} \cdot \hat{y} \to \widehat{(w * y)} \xrightarrow{FFW} w * y$$

$p^n \log p$ Operationen statt $p^{2n}$

19.11.90

Diskrete Faltung

$$z_k = \sum_{0 \le l < p} w_{k-l}\, y_l \qquad n=2:\; z_k = \sum_{0 \le l_1 < p} \sum_{0 \le l_2 < p} w_{k_1-l_1, k_2-l_2}\, y_{l_1, l_2}$$

Die Faltung heißt zyklisch, falls $w_k = w_{k+pe_i}$ $\quad i = 1, \dots, n$

$e_i$ = i-ter Einheitsvektor

Für zyklische Faltung:

$$\hat{z}_k = p^n \hat{w}_k \hat{y}_k \;,\; 0 \le k < p$$

wird in der schnellen (zykl.) F. ausgenutzt (nicht periodische Fkn. werden zuvor periodisch fortgesetzt! ⇒ wrap-around Fehler! s.u.)

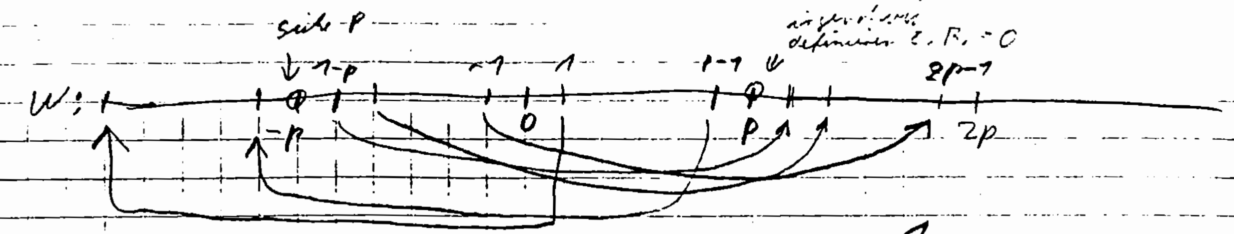
Schnelle zyklische Faltung: FFT (s.o., S.57!)

Schnelle Faltung (allgemein):

$$n=1: \quad z_k = \sum_{l=0}^{2p-1} w_{k-l}\, y_l \;,\; y_p = y_{p+1} = \dots = y_{2p-1} = 0 \;!$$

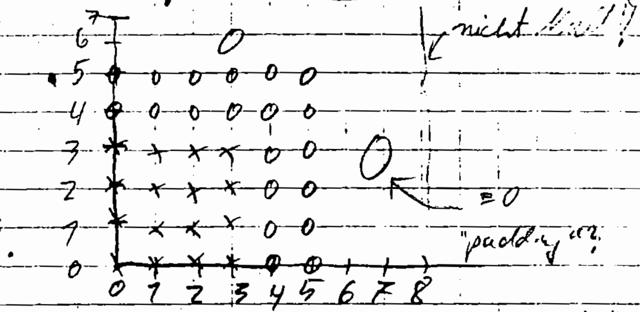
(zero-padding) padding

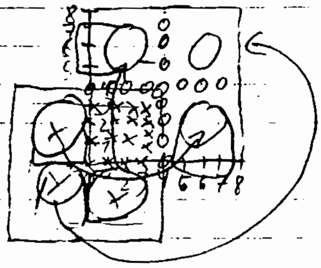
per. fortgesetzt — durch 0 fortgesetzt




Durch Fortsetzen von $w$ mit Periode $2p$ entsteht eine zyklische Faltung der Länge $2p$. Dann FFT!

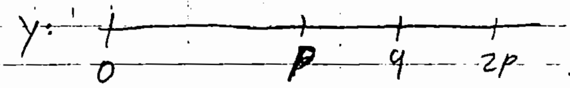
$n=2$: $p=4$



Unzureichendes padding $\Rightarrow$ wrap-around-Fehler

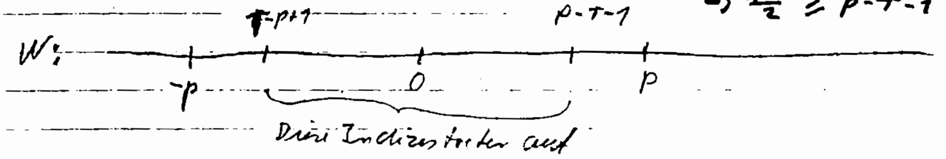
$n=1$:




$y_p = y_{p+1} = \dots y_{q-1} \overset{!}{=} 0$

$$z_k = \sum_{\ell=0}^{q-1} w_{k-\ell}\, y_\ell \qquad \text{für } k = 0, \dots, p-1$$

Sei $r \le k \le p-r-1$, $q > 2(p-r-1)$, $q-1 \ge 2(p-r-1)$
$\Rightarrow \frac{q-1}{2} \ge p-r-1 \Rightarrow r \ge p-1-\frac{q}{2}$
$\Rightarrow r \ge p - \frac{q}{2} -$




Setze $w^*$ fort zu $q$-periodischem Vektor $w'$

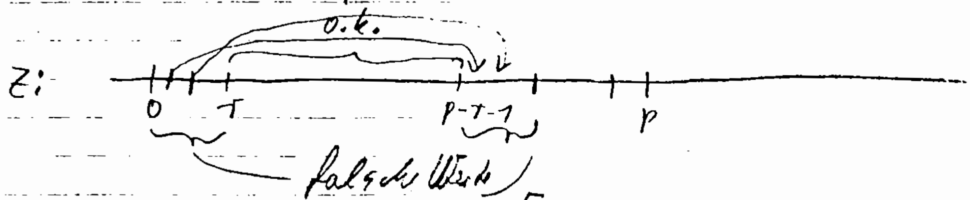
$*$ außerhalb $r-p+1$ und $p-r-1$ $*$

$$z'_k = \sum_{\ell=0}^{q-1} w_{k-\ell}\, y_\ell, \quad k = 0, \dots, q-1$$

zyklische Faltung der Länge $q$

$z'_k = z_k$, falls $r \le k \le p-r-1$ und $r \ge p - \frac{q}{2} - \frac{1}{2}$

o.k.




Wrap-around-Fehler, periodisch

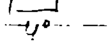
Folgerung: $q \ge 2p$, um wrap-around zu vermeiden?

# Teil II Bildverarbeitung

## §1 Das menschliche Auge

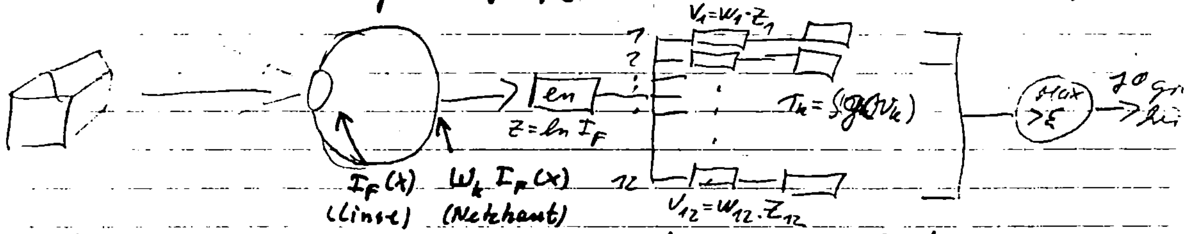
Ziel: mathematische Beschreibung des Sehvorganges

(einfarbige, unbewegliche Bilder)




$I(x)$ : Intensität des Bildes im Punkte $x$, $x \in \mathbb{R}^2$
$x_1, x_2$ in Winkelgraden [

$I(x)$ = Strahlungsenergie / (Zeiteinheit · Flächeneinheit)





Betrachtet wird ein Quadrat mit 4° „Seitenlänge“

⇒ In 30 cm Abstand hat das Quadrat die Seitenlänge

$30 \cdot \sin 4 \frac{2\pi}{360} \approx 2\,\text{cm}$

**7 Stufen:**

1. Stufe:

$$\hat{I}_F(x) = \begin{cases} \hat{I}(\xi), & |\xi| < b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad b \sim 400 \quad \text{Tiefpaßfilterung}$$

2. Stufe:

Abtasten mit $h = \frac{1}{120}°$ ; $\frac{\pi}{b} = \frac{1}{128} \sim h$

Abtasttheorem von Shannon erfüllt!

3. Stufe

Übergang zum Logarithmus

$I_0$: Hintergrundbild

$$z = \ln I_F = \ln(I_0 + I_F - I_0)$$
$$\overset{\text{Taylor}}{=} \ln I_0 + \frac{I_F - I_0}{I_0} + \ldots$$

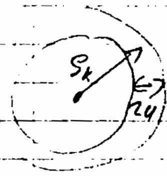
Die Empfindlichkeit $\frac{I_F - I_0}{I_0} \sim 0.02$ wird aufgelöst.

Der Intensitätsbereich, den das Auge verarbeiten kann: $1 - 10^4$

4. Stufe:

Trennung der räumlichen Frequenzen:

$$\hat{z}_k(\xi) = \begin{cases} \hat{z}(\xi), & \left| |\xi| - \rho_k \right| < a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



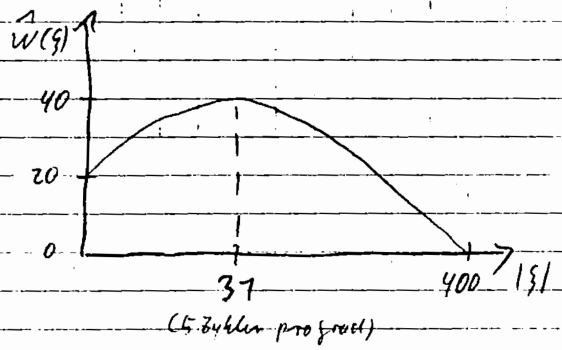

(Bandpaß-Filter) $\qquad a \sim 16 \Rightarrow k \sim 1..12$

5. Stufe

Kontrastverstärkung:

$$v_k = w_k \cdot z_k \quad , k = 1 \ldots 12$$

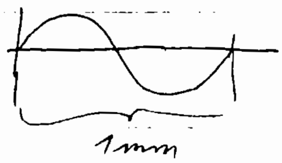
d.h. $\hat{v} = \hat{w} \cdot \hat{z}$ , $\hat{w}(\xi) = w_k$ für $\left| |\xi| - \rho_k \right| < a$




$5 \frac{\text{Zykl}}{\text{Grad}} = 1 \text{ Zykl} / \frac{1}{5}°$

30 cm $\Rightarrow$ 1 Zyklus auf $30 \cdot \sin\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2\pi}{360}\right)$

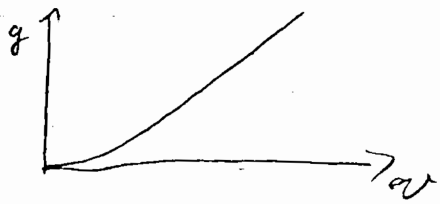
$\Rightarrow$ 1 Zyklus pro mm




6. Stufe

In jedem der 12 Kanäle wird

$$T_k = \int g(v_k)\, dx \quad , g \text{ nicht linear}$$




7. Stufe

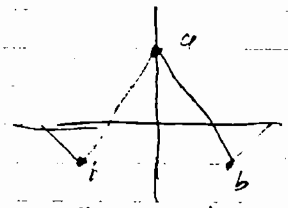
Maximum der 12 Kanäle $> \varepsilon$ $\Rightarrow$ Meldung ans Großhirn

Kontrastverstärkung durch laterale Inhibition

$y_j$ : Intensität, mit der die Zelle $j$ getroffen wird.

$u_j$ : Reaktion der Zelle $j$

$$u_j = \underbrace{a\,y_j}_{\text{Impuls}} \underbrace{- b\,y_{j-1} - b\,y_{j+1}}_{\text{benachbarte Zellen hemmen Impuls}}$$




"Filter"
Kontrastverstärkung

(Num. Bildv. 22.11.90)

## §2 Stochastische Bildmodelle

**1.) Zufallsgröße in $\mathbb{R}^1$:** Experiment mit reellwertigem, aber zufälligem Ausgang

$$(*) \quad P(x \le \xi \le x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} p(x')\,dx'$$

$$\text{mit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1, \quad p \geq 0$$

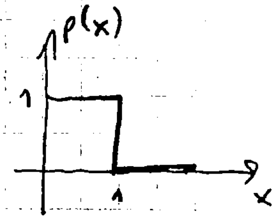
ist Wahrscheinlichkeit dafür, daß $\xi$ in $[x, x+\Delta x]$ fällt.

$p$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte von $\xi$

Realisierung von $\xi$: Ausgang eines bestimmten Experimentes (reelle Zahl)

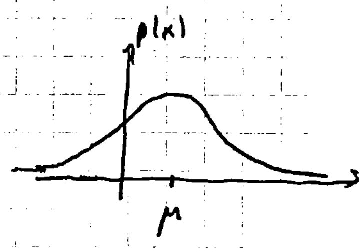
Beispiele: i.) $\xi$ sei gleichverteilt in $[0,1]$, d.h.

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$




ii.) $\xi$ $(\mu, \sigma)$-normal verteilt:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$




Histogramm: Unterteile $x$-Achse durch Punkte $x_k$

$$z_k := \frac{\# \{ l : x_k \le \xi^{(l)} < x_{k+1} \}}{n \cdot (x_{k+1} - x_k)}$$

( $n$ Experimente mit Realisierungen $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ von $\xi$ !)

Zusammenhang zwischen Histogramm und Dichte:

$$P(x_k \le \xi < x_{k+1}) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x)\,dx \sim p(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$\frac{\#\{\ell : x_k \le \xi^{(\ell)} < x_{k+1}\}}{n} = \text{rel. Häufigkeit} \sim$$

$$\sim P(x_k \le \xi < x_{k+1}) \sim p(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$\Rightarrow z_k \sim p(x_k)$$

Erwartungswert: $E\xi = \int_{\mathbb{R}^1} x\,p(x)\,dx$

$$\sim \sum_k x_k\, p(x_k)(x_{k+1} - x_k) \sim \sum_k x_k\, z_k\, (x_{k+1} - x_k)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_k x_k \cdot \#\{\ell : x_k \le \xi^{(\ell)} < x_{k+1}\}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k_\ell} \qquad , k_\ell : x_{k_\ell} \le \xi^\ell < x_{k_\ell + 1}$$

$$\sim \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \xi^{(\ell)}$$

$F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ , $F(\xi)$ Zufallsgröße

$$\to E F(\xi) := \int F(x)\,p(x)\,dx \sim \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} F(\xi^{(\ell)})$$

Varianz: $\sigma^2(\xi) = E(\xi - E\xi)^2 = \int (x - E\xi)^2 p(x)\,dx$

$$\sim \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} (\xi^{(\ell)} - E\xi)^2$$

$$F(\xi) = (\xi - E\xi)^2$$

Standardabweichung : $\sigma(\xi)$

## 2. Zufallsgrößen in $\mathbb{R}^N$:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix}, \quad \xi_i \text{ Zufallsgrößen in } \mathbb{R}^1$$

$$P(\xi \in B) = \int_B p(x)\, dx \quad \text{mit} \quad \int_{\mathbb{R}^N} p(x)\, dx = 1, \; p \geq 0 .$$

$p$ Dichte von $\xi$, gemeinsame Dichte von $\xi_1, \dots, \xi_N$

gemeinsame Dichte $p$ bestimmt die Dichte $p_i$ von $\xi_i$:

$$P(x_1 \leq \xi_1 < x_1 + \Delta x_1) = P(x_1 \leq \xi_1 < x_1 + \Delta x_1,\ \xi_2 \in \mathbb{R}^1, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}^1)$$

$$= P(\xi \in B) \text{ mit } B := [x_1, x_1 + \Delta x_1] \times \mathbb{R}^{N-1}$$

$$= \int_B p(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} p(x_1, x')\, dx'\, dx_1$$

$$= \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} p_1(x_1')\, dx_1' \quad \text{mit } p_1(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} p(x_1, x')\, dx'$$

$\xi_1, \dots, \xi_N$ unabhängig $\Leftrightarrow$ $p(x) = \prod_{i=1}^N p_i(x_i)$,

$p_i$ Dichte von $\xi_i$

$$\Leftrightarrow P(x_i \leq \xi_i < x_i + \Delta x_i,\ i = 1, \dots, N)$$

$$= \prod_{i=1}^N P(x_i \leq \xi_i < x_i + \Delta x_i)$$

$F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $F(\xi)$ Zufallsgröße in $\mathbb{R}^M$

$$E\, F(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x)\, p(x)\, dx \in \mathbb{R}^M !$$

Speziell: $\quad E\xi = \int x\, p(x)\, dx \quad \in \mathbb{R}^N$!

$$\int x_i\, p_i(x_i)\, dx_i = E\xi_i = \int x_i\, p(x)\, dx$$

$$E(\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j) =: \mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

"Kovarianz".

Korrelation: $\quad \rho(\xi_i, \xi_j) = \dfrac{\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)}{\sigma(\xi_i)\,\sigma(\xi_j)}$

$$\sigma^2(\xi_i) = E(\xi_i - E\xi_i)^2 = \int (x_i - E\xi_i)^2\, p(x)\, dx$$

$$= \int (x_i - E\xi_i)^2\, p(x_i)\, dx_i$$

Lemma: $\quad -1 \le \rho(\xi_i, \xi_j) \le 1$

Beweis: Inneres Produkt $(f, g) = \int f(x)\, g(x)\, p(x)\, dx$

$$f = x_i - E\xi_i, \quad g = x_j - E\xi_j$$

$$\rho(\xi_i, \xi_j) = \frac{(f,g)}{(f,f)^{1/2}(g,g)^{1/2}}$$

$$\left[\, E(\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j) = \int (x_i - E\xi_i)(x_j - E\xi_j)\, p(x)\, dx \quad ! \,\right]$$

$\Rightarrow \; |\rho(\xi_i, \xi_j)| \le 1$ nach Cauchy-Schwarz für $(f, g)$ $\quad \square$

Bemerkung: $\xi_i, \xi_j$ heißen $\left\{ \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{un-} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\}$ korreliert

$$\Leftrightarrow \quad \rho(\xi_i, \xi_j) \left\{ \begin{matrix} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{matrix} \right\}$$

Seien $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ Realisierungen von $\xi$

$$\operatorname{Cov}(\xi_i, \xi_j) \sim \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} (\xi_i^{(\ell)} - E\xi_i)(\xi_j^{(\ell)} - E\xi_j)$$

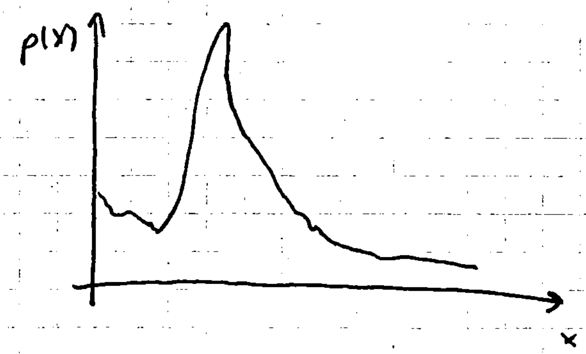
$\rho(\xi_i, \xi_j)$ Maß für die Korreliertheit von $\xi_i, \xi_j$.

## Stochastisches Bildmodell:

Bild: $f = (f_1, \dots, f_N)^T \in \mathbb{R}^N$, $f_k$ Zufallsgrößen.
(= Spaltenvektor!)

In der Regel: $f_k$ gleiche Dichten, $\mu = E f_k$, $\sigma^2 = \sigma^2(f_k)$

Fakt 1: Verteilung $\rho$ von $f_k$ extrem ungleichmäßig:




Fakt 2: Benachbarte $f_k$ sind hochkorreliert
($\rho \in [0{,}85; 0{,}95]$)

$R_f := \left( \rho(f_k, f_\ell) \right)_{k,\ell = 1,\dots,N}$ Korrelationsmatrix von $f$

$K_f := \left( \operatorname{Cov}(f_k, f_\ell) \right)_{k,\ell = 1,\dots,N}$ Kovarianzmatrix von $f$,
pos. semidefinit

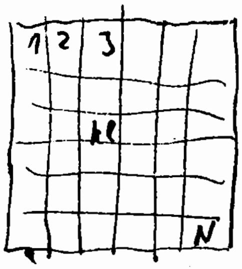
## Modelle für $K_f$:

Isotropes exponentielles Modell: $\operatorname{Cov}(f_k, f_\ell) = \sigma^2 e^{-\lambda \|x_\ell - x_k\|_2}$

Separables exponentielles Modell:

$x_k$ Mittelpunkt von Pixel $k$, $\mathrm{Cov}(f_k, f_l) = \sigma^2 e^{-\lambda \|x_k - x_l\|_1}$

$\|.\|_1 = L_1$-Norm!




also: Cov. exponentiell mit dem Abstand abnehmend!

(Num. Bildver. 26.11.90)

# § 3 Effiziente Codierung von Bildern
(Datenreduktion)

$f = (f_1, \dots, f_N)^T$ Bild

gesucht: $g$ mit

1.) $f$ aus $g$ rekonstruierbar (bzgl. gegebener Fehlertoleranz?).
2.) Übertragung von $g$ „einfacher" als Übertragung von $f$.

## 1.) Heuristische Methoden:

a.) Run-coding: Es treten „runs" auf:

$$f_k = f_{k+1} = \dots = f_\ell .$$

Übertrage $(k, \ell, f_k)$!

b.) Predictive coding: (DPCM = differential pulse code modulation):

Annahmen: $f_1, \dots, f_N$ Zufallsgrößen
$E f_k = \mu$, $\rho = \rho(f_k, f_{k+1})$,

$\sigma = \sigma(f_k)$, $k = 1, \dots, N$

Schätzung für $f_{k+1}$ nach der Übertragung von $f_k$:

$$\hat{f}_{k+1} = \rho f_k + (1-\rho)\mu$$

Frage: Wo wird $f$ codiert, und wo die Schätzung $d_{k+1}$?
⇒ vgl. S. 84, 88?
("Recursive block coding")

Übertrage: $d_{k+1} = f_{k+1} - \hat{f}_{k+1}$

$$E d_{k+1}^2 = E\left(f_{k+1} - \rho f_k - (1-\rho)\mu\right)^2 =$$
$$= E\left((f_{k+1} - \mu) - \rho(f_k - \mu)\right)^2 =$$

$$= E(f_{k+1}-\mu)^2 + \rho^2 E(f_k-\mu)^2 - 2\rho E(f_{k+1}-\mu)(f_k-\mu)$$

$$= \sigma^2 + \rho^2\sigma^2 - 2\rho\cdot\rho\sigma^2$$

$$= \sigma^2(1-\rho^2)$$

$$E\, d_{k+1} = E(f_{k+1} - \rho f_k - (1-\rho)\mu)$$

$$= \mu - \rho\mu - (1-\rho)\mu = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma^2(d_{k+1})}{\sigma^2(f_{k+1})} = \frac{\sigma^2(1-\rho^2)}{\sigma^2} = 1-\rho^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma(d_{k+1})}{\sigma(f_{k+1})} = \sqrt{1-\rho^2}$$

} $\hat{=}$ Reduktion der Größenordnung der zu übertragenden Werte!

(z.B. $\rho = 0.9$, $\sqrt{1-\rho^2} \approx 0.5$) (d.h. Reduktion auf etwa die Hälfte!)

## 2.) Transformationsmethoden:

noch geeignet zu wählende (s.u.) → Karhunen-Loève-Transf. Karhunen Loève

$U$ unitäre $(N,N)$-Matrix, $g = Uf$ ✓

$U^{-1} = U^T = V_f$, s.u.!

d.h. bei der Übertragung weggelassen und zur Rekonstruktion wieder zugefügt?

übertrage: ("Codierung")
$$\underline{g^M} = \begin{cases} g_k, & k = 1,\dots,M \\ b_k, & k = M+1,\dots,N \end{cases}$$

($b_k$ bekannt)

(z.B. $b_k = 0$)

$= V_f$ = Matrix der orthonorm. EVen von $K_f$, s.u.!

$$\underline{f^M} = U^T g^M \quad \text{("Rekonstruktion")}$$

**Satz 3.1.:** $f = (f_1,\dots,f_N)^T$ ein Bild mit $Ef = \mu$ und Ko varianz [redacted] matrix $K_f$. Sei $b = U\mu$. Dann gilt:

Abschneidestelle!

$$\underbrace{E\,\|f - f^M\|^2}_{\text{soll minimiert werden!}} = \sum_{i=M+1}^{N} u_i^T \underline{K_f}\, u_i \quad \text{, mit } U = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_N^T \end{pmatrix}$$

euklid. Norm

**Beweis:**

$$f - f^M = f - \mathcal{U}^{-1} g^M = \mathcal{U}^T \mathcal{U} f - \mathcal{U}^T g^M$$

$$= \mathcal{U}^T (g - g^M)$$

$$= \sum_{i=M+1}^{N} (g_i - b_i) u_i$$

$$\| f - f^M \|^2 = \sum_{i=M+1}^{N} (g_i - b_i)^2 \quad ,$$

$$b_i = u_i^T \mu \quad , \; g_i = u_i^T f$$

$$= \sum_{i=M+1}^{N} (g_i - b_i)(g_i - b_i)$$

$$= \sum_{i=M+1}^{N} u_i^T \underbrace{(f-\mu)\;(f-\mu)^T}_{\text{dyad. Prod.}} u_i$$

$$g_i - b_i = u_i^T (f - \mu) \quad , (g_i - b_i)^T = (f-\mu)^T u_i$$

$$E \| f - f^M \|^2 = \sum_{i=M+1}^{N} u_i^T E \underbrace{(f-\mu)(f-\mu)^T}_{} u_i$$

$$\underbrace{E\,(f_k - \mu_k)(f_l - \mu_l)}_{\text{also } = K_f} = \mathrm{Cov}(f_k, f_l)$$

also $= K_f$ (Kovarianzmatrix)

□

**Ziel:** Wähle $\mathcal{U}$ so, daß $\sum_{i=M+1}^{N} u_i^T K_f u_i$ möglichst klein!

d.h. möglichst viel Information auf die ~~vorderen~~ (vgl. Satz 3.1.!) ersten Eintragungen!

**Satz 3.2.:** Sei $f$ wie in Satz 3.1. .

Karhunen-Loève: Sei $\underline{V_f} = (v_1, \dots, v_N)$ die Matrix der orthonormierten Eigenvektoren

$\mathcal{U}^T = V_f$ der Kovarianzmatrix $K_f$, und seien $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ die

zugehörigen EWe. Dann ist ~~das~~ Sei $\mathcal{U}^T = V_f$

d.h. $\underline{\mathcal{U} = (V_f)^T}$

$$\min_{\mathcal{U} \text{ unitär}} E \| f - f^M \|^2 = \lambda_{M+1} + \dots + \lambda_N$$

(b.w.)

und das Minimum wird bei $U^T = V_f$ angenommen.

Bemerkung:

Die durch $V_f$ erzeugte unitäre Transformation $\mathcal{U}$ heißt die "Karhunen - Loève - Transformation" oder "Hotelling-Transf." zu $K_f$.

! variiert mit $K_f$ !

Beweis: Zu zeigen:

$$\min_{U^T U = I} \sum_{i=M+1}^{N} u_i^T K_f u_i = \lambda_{M+1} + \ldots + \lambda_N$$

Min exist., da stetige Fn. auf kompakter Menge.

(a) $M = 0$:

$$\min_{U^T U = I} \sum_{i=1}^{N} u_i^T K_f u_i$$

$$= \min_{U^T U = I} \operatorname{Spur}\left(\mathcal{U} K_f U^T\right)$$

$$= \operatorname{Spur}(K_f)$$ , da Spur invariant und Min. unabh. von $U$

$$= \lambda_1 + \ldots + \lambda_N$$

(b) $0 < M < N$:

Lagrange'sche Multiplikatoren:

Min $F(x)$ unter NB $g_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, p$

notw. Bedingung: $\exists\, \beta_1, \ldots, \beta_p$ : $F(x) - \sum_{i=1}^{p} \beta_i g_i(x)$ stationär,

d.h. sämtliche part. Abl. nach $x$ verschwinden.

Anwendung:

$$\sum_{i=N+1}^{M} u_i^T K_\ell u_i - \sum_{i,k=N+1}^{M} \beta_{ik} (u_i^T u_k - \delta_{ik}) \text{ stationär}$$

NB: $u_i^T u_k = \delta_{ik}$

$$\nabla_{u_j} : 2 K_\ell u_j - \sum_{i=M+1}^{N} \beta_{ij} u_i - \sum_{i=M+1}^{N} \beta_{ji} u_i = 0$$

$(j = M+1, \dots, N)$

$\Rightarrow$ Für die Lösung unseres Problems ist notwendig:

$$K_\ell u_j \in \operatorname{Lin}\{u_{M+1}, \dots, u_N\} =: V$$

d.h.: $V$ ist invarianter Unterraum von $K_\ell$

$\Rightarrow$ $V = \operatorname{Lin}\{v_{i_1}, \dots, v_{i_{N-M}}\}$ mit EVen $v_{i_\ell}$ von $K_\ell$

Da invar. Unterr. von EVen aufgespannt werden.

def: $K_V$ = Restriktion von $K_\ell$ auf $V$

$$\Rightarrow \min_{U^T U = I} \sum_{i=N+1}^{M} u_i^T K_\ell u_i = \min_{\substack{u_i \in V \\ u_i^T u_k = \delta_{ik}}} \sum_{i=M+1}^{N} u_i^T K_\ell u_i$$

$$= \min_{\substack{u_i \in V \\ u_i^T u_k = \delta_{ik}}} \sum_{i=M+1}^{N} u_i^T K_V u_i$$

Wende nun (a) an, dann folgt:

$$= \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_{N-M}}$$

Also zu suchen: $\min\{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_{N-M}}\} = \lambda_{M+1} + \dots + \lambda_N$

da EWe aufsteigend geordnet!

(Num. Bildanalyse 03.11.90)

**Satz 3.2.:** $\min\limits_{U} E\,\|f - f^M\|^2 = \lambda_{M+1} + \dots + \lambda_N$ Minimum wird

Korrektur! nur letzten Stel.

angenommen für $\underline{U^T = V_f}$

$U^{-1}$, da $U$ unitär

unitär! $g = Uf$, $U^{-1} = U^T$

$f_M \Rightarrow f^M = U^{-1} g_M = U^T g_M = V_f g_M$

**Bemerkung:** 1.) $U$ Karhunen-Loève

**Rekonstruktion:** 2.) $f^M = V_f g^M$ !

Spalten von $V_f$ heißen "Basisbilder"!

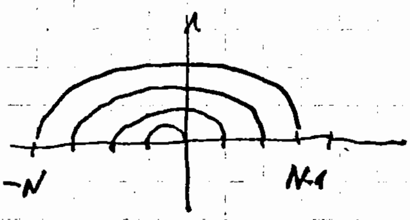
**Beispiele:** 1.) Diskrete Cosinus-Transformation

$n=1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2N}}\, e^{-\frac{\pi i k}{2N}} \sum_{l=-N}^{N-1} e^{-\pi i k l/N} f_l =: g_k'$$

Es gilt: $$\sum_{k=-N}^{N-1} |g_k'|^2 = \sum_{l=-N}^{N-1} |g_l|^2$$

$f_l = f_{-l-1}$, $l = -1, \dots, -N$




$$g_k' = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{l=-N}^{N-1} e^{-\pi i k (l+\frac{1}{2})/N} f_l$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N}} \Big\{ \sum_{l=0}^{N-1} e^{-\pi i k (l+\frac{1}{2})/N} f_l + \underbrace{\sum_{l=-1}^{-N} e^{-\pi i k (l+\frac{1}{2})/N} f_l} \Big\}$$

$(l = -l'-1)$: $$\underbrace{\sum_{l'=0}^{N-1} e^{-\pi i k (-l'-\frac{1}{2})/N} f_{-l'-1}}$$

$$\sum_{l=0}^{N-1} e^{\pi i k (l+1/2)/N} f_l$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N}} \cdot 2 \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \cos \pi k (l+1/2)/N \; f_l$$

$$g'_k = - g'_{-k} \quad ; \; g_N = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\sum_{k=-N}^{N-1} |g'_k|^2} = |g'_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} |g'_k|^2 = \underline{\sum_{l=-N}^{N-1} |f_l|^2}$$

$$= 2 \sum_{l=0}^{N-1} |f_l|^2$$

Setze: $g_k = g'_k$ für $k > 0$

$g_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}\, g'_0$

$$\Rightarrow \underline{\sum_{k=0}^{N-1} |g_k|^2 = \sum_{l=0}^{N-1} |f_l|^2}$$

**Also:**

$$g_k = C_k \sum_{l=0}^{N-1} \cos k\pi (l+\tfrac{1}{2})/N \; f_l$$

mit $C_k = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{N}} & , k > 0 \\ \sqrt{\frac{1}{N}} & , k = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$: $\underline{g = \underline{U} f}$ , $\underline{U \;\; \text{DCT}}$

(Diskrete Cosinus Transformation)

**Bem:** DCT ist näherungsweise die Karhunen-Loève-Transformation für

$$K_f = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 \cdots & \rho^{N-2} \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \rho^{N-1} & \cdots & & \rho & 1 \end{pmatrix}$$ exponentielles Modell

z.B.: $N = 8, \; \rho = 0.9$

Näherung für die EWe von $X_f$:

$$\lambda_k = \frac{1-\rho^2}{\frac{1}{\rho} + \rho - 2\cos\frac{k\pi}{N}} \quad \text{für } k = 0, \dots, N-1$$

Näherung besonders gut für große $\rho$ (nur wenig kleiner als 1)

## 2.) Hadamard - Transformation

$H_N$ = Hadamard-Matrix der Ordnung $N$

$\mathcal{U} = N^{-\frac{1}{2}} H_N$ unitär

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \; ?$$

Reihenfolge egal?

$H_{16} \otimes H_{16}$

Basisbilder $v_{00} \; v_{01} \; v_{10} \; \dots \; v_{15,15}$

(schachbrettartige Muster!)

## 3.) Die Haar - Transformation

$N = 8 \qquad H_N =$

$$H_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$(N=8)$

(HT eleganteste Transformationen, da dazu nur Addit. + Subtr., aber keine Mult. notwendig! → Kein Rechnen mit Gleitkomma → geringe Rundungsfehler. )

$$\underline{U = D^{-1} H_N}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 8 & & & & & & & \\ & 8 & & & & & 0 & \\ & & 4 & & & & & \\ & & & 4 & & & & \\ & & & & 2 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & 0 & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

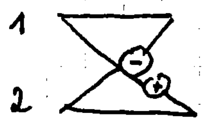
## Schnelle Haar-Transformation : (s.u.! Dort ausführlicher!)

(Basisbilder) dünner besetzt als bei Hadamard Transf.!

$$g = D^{-2} H_N f$$

| | | $\cdot\frac{1}{2}$ | Umordnen: | | | $\cdot\frac{1}{2}$ | | | | $\cdot\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | S | $f_1+f_2$ | → | $f_1+f_2$ | S | $f_1+f_2+f_3+f_4$ | → | $f_1+f_2+f_3+f_4$ | S | $f_1+f_2+\dots+f_8$ |
| $f_2$ | | $f_1-f_2$ | | $f_3+f_4$ | | $f_1+f_2-f_3-f_4$ | | $f_5+f_6+f_7+f_8$ | | $f_1+\dots+f_4-f_5\dots$ |
| $f_3$ | S | $f_3+f_4$ | | $f_5+f_6$ | S | $f_5+f_6+f_7+f_8$ | | $f_1+f_2-f_3-f_4$ | | schon |
| $f_4$ | | $f_3-f_4$ | | $f_7+f_8$ | | $f_5+f_6-f_7-f_8$ | → | $f_5+f_6-f_7-f_8$ | | passend |
| $f_5$ | S | $f_5+f_6$ | | $f_1-f_2$ | | | | | | |
| $f_6$ | | $f_5-f_6$ | | $f_3-f_4$ | sind schon | | | | | |
| $f_7$ | S | $f_7+f_8$ | | $f_5-f_6$ | passend | | | | | |
| $f_8$ | | $f_7-f_8$ | → | $f_7-f_8$ | | | | | | |

S : Schmetterling :

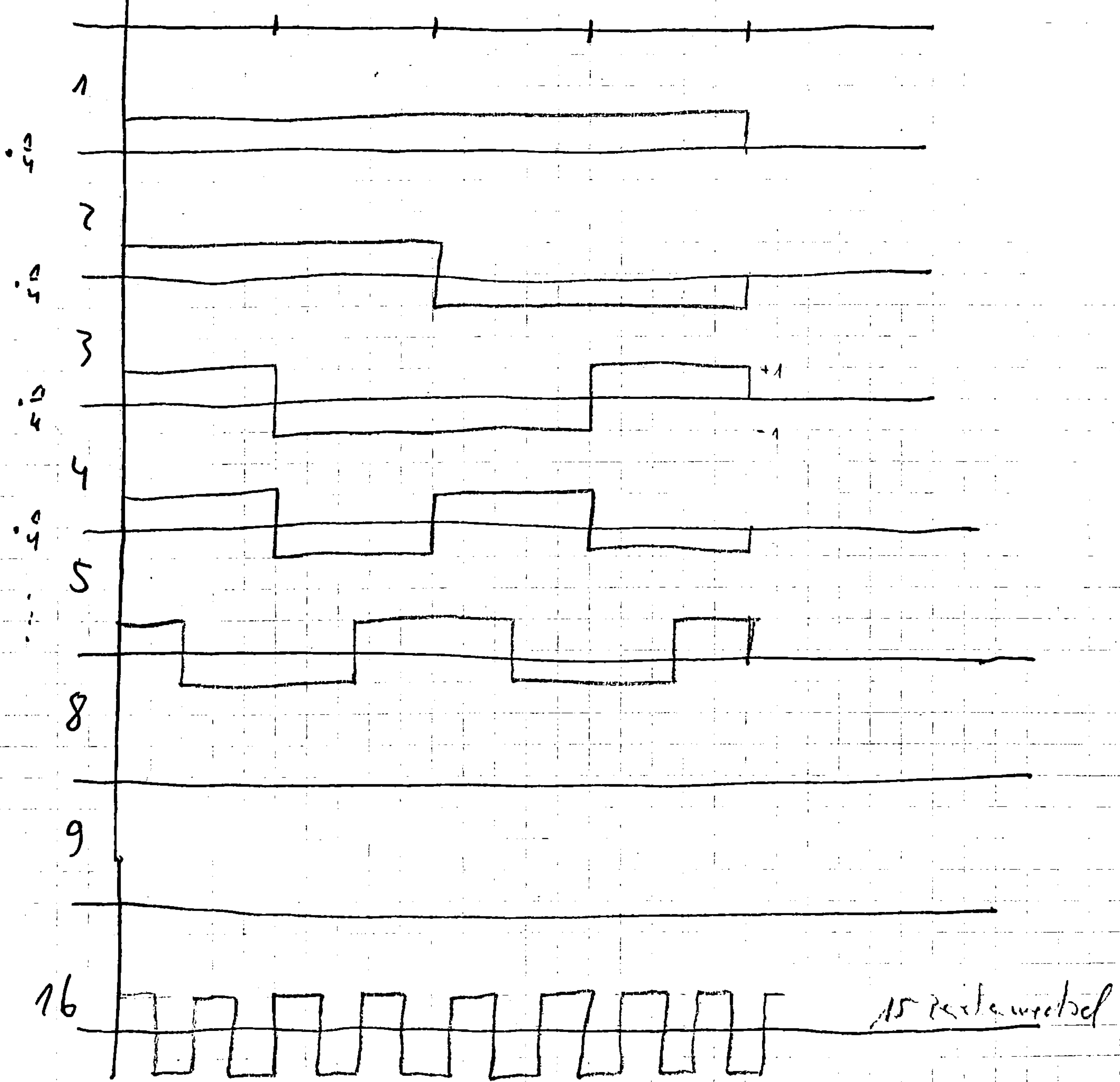



Anzahl Additionen:

$$N + \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \dots + 2 = \underline{\underline{2N-2}}$$

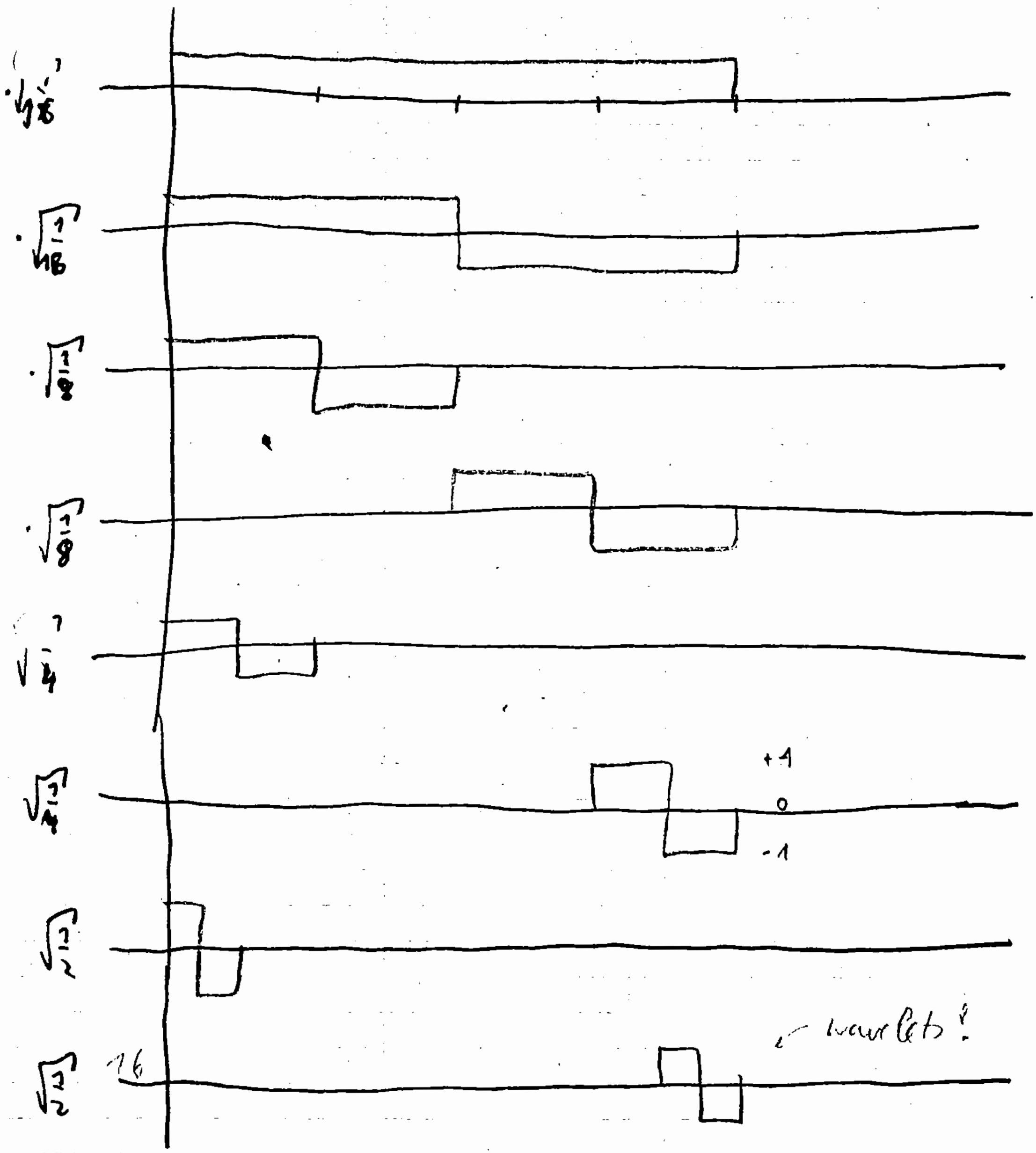
<u>Vergleich:</u> <u>Hadamard-Transformation mit Haar-Transformation</u> $(N = 16)$

<u>Hadamard:</u> Zeilen von $H_N$:



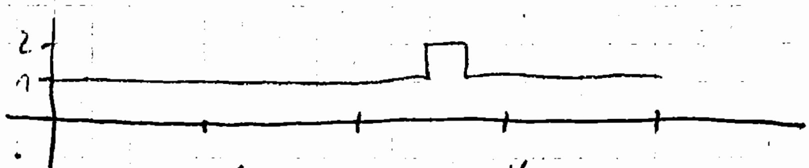
## Haar-Transf.:

Zeilen von $H_N$: $(N=16)$




$$f = Ug$$

Kodiere:




$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ \vdots \\ g_{14} \\ g_{15} \\ g_{16} \end{pmatrix} \overset{\text{Hadamard}}{=} \begin{pmatrix} 17/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \\ +1/4 \\ \vdots \\ -1/4 \\ +1/4 \end{pmatrix} \overset{\text{Haar}}{=} \begin{pmatrix} 17/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{1}{8}} \\ 0 \\ \vdots \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

alle Koeff $\neq 0$

viele Koeff $= 0$!

( Num. Bildv. 06.12.90 )



## Schnelle Haar - Transformation

$N = 2^p \quad , \quad p = 3$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_1+f_2 \\ f_3+f_4 \\ f_5+f_6 \\ f_7+f_8 \\ \hline f_1-f_2 \\ f_3-f_4 \\ f_5-f_6 \\ f_7-f_8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f^2 \\ \\ \leftarrow g^2 \end{matrix} \cdot \frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix} f_1+f_2+f_3+f_4 \\ f_5+f_6+f_7+f_8 \\ \hline f_1+f_2-f_3-f_4 \\ f_5+f_6-f_7-f_8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f^1 \\ \\ \leftarrow g^1 \end{matrix} \cdot \frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix} f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7+f_8 \\ \hline f_1+f_2+f_3+f_4-f_5-f_6-f_7-f_8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f^0 \\ \leftarrow g^0 \end{matrix} \cdot \frac{1}{2}$$

"Glättung", "Blurring", "Restriktion"

$$L_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1\;1 & & & 0 \\ & 1\;1 & & \\ & & 1\;1 & \\ 0 & & & 1\;1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Matrix } 4 \times 8$$

$$\text{allg. } L_j = \frac{1}{2} \underbrace{\boxed{\text{gleiche Bauart}}}_{2^j} \Big\} \, 2^{j-1}$$

$$H_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1\;-1 & & & 0 \\ & 1\;-1 & & \\ & & 1\;-1 & \\ 0 & & & 1\;-1 \end{pmatrix} , \quad H_j \text{ analog.}$$

"Erweiterung"

$$\underline{L_3' = 2\,L_3^T} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1\;1\;1\;1}}^{2^2=4} \\ \left.\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}\right\} 2^3 = 8 \end{array}$$

, $L_j'$ analog

$$\underline{H_3' = 2\,H_3^T} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & & & \\ & 1 & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 L_3' = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = I_{2^{3-1}}$$

$$L_j L_j' = I_{2^{j-1}} \qquad H_j H_j' = I_{2^{j-1}}$$

$$H_3' H_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & & & 0 \\ -1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & -1 & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & -1 \\ 0 & & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_3' L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & 0 \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ 0 & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_3' H_3 + L_3' L_3 = I_{2^j}$$

## Algorithmus von Mallot:

$f$ wie vorne. $f = (f_1, \dots, f_N)^T$

$$f^p = f\,, \quad f^{j-1} = L_j f^j\,, \quad g^{j-1} = H_j f^j \,, j = p, p-1, \dots, 1$$

Resultat: $f^0, g^0, g^1, \dots, g^{p-1}$

Rekonstruktion:

$$f^j = (H_j' H_j + L_j' L_j)\, f^j = H_j'\, g^{j-1} + L_j'\, f^{j-1} \quad , j = 1, \dots, p$$

Codierung:
$$f = f^p \xrightarrow{L'} f^{p-1} \xrightarrow{L} \dots \rightarrow f^1 \longrightarrow f^0$$
$$f^p \xrightarrow{H} g^{p-1}, \quad f^{p-1} \xrightarrow{H} g^{p-2}, \quad \dots, \quad f^1 \xrightarrow{H} g^0$$

Rekonstr.:
$$f^0 \xrightarrow{L'} f^1 \xrightarrow{L'} f^2 \longrightarrow \dots \quad f^{p-1} \xrightarrow{L'} f^p = f$$
$$g^0 \xrightarrow{H'} f^1, \quad g^1 \xrightarrow{H'} f^2, \quad \dots, \quad g^{p-1} \xrightarrow{H'} f^p$$

$$d^j = f^j - L_j' f^{j-1} = f^j - L_j' L_j f^j = (I - L_j' L_j)\, f^j$$

$$d^3 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} f_1+f_2 \\ f_1+f_2 \\ f_3+f_4 \\ f_3+f_4 \\ f_5+f_6 \\ f_5+f_6 \\ f_7+f_8 \\ f_7+f_8 \end{pmatrix}$$

"Details der Stufe 3"

3.) **Rekursive Block-Codierung:**

Ausgangspunkt DPCM : (vgl. S. 69!)

$$f = (f_0, \ldots, f_N) \quad , \quad E f_k = \mu \quad , \quad \sigma^2(f_k) = \sigma^2$$

$$\rho_{k,l} = \rho^{|k-l|} \quad (k,l = 0,1,2,\ldots,N)$$

bei DPCM:

Schätzung: $\hat{f}_k = \rho f_{k-1} + (1-\rho)\mu$

Übertrage: $d_k = f_k - \hat{f}_{k}$ , $E d_k^2 = \sigma^2(1-\rho^2)$

Nun: Verbesserung:

$$\hat{f}_k = \alpha \underset{\text{Vorgänger}}{f_{k-1}} + \beta \underset{\substack{\text{Nachfolger} \\ \text{neu!}}}{f_{k+1}} + \underset{\text{entf. } \mu}{\gamma} \quad , \quad d_k = f_k - \hat{f}_k$$

Bestimme $\alpha, \beta, \gamma$ so, daß $E(d_k^2)$ minimal!

OBdA: $\mu = 0$ (sonst ersetze $f_k$ durch $f_k - \mu$!). beachte $\mu = 0$!

Symmetrie: $\hat{f}_k = \alpha(f_{k+1} + f_{k-1})$ (d.h. $\alpha = \beta$, $\gamma = 0$.)

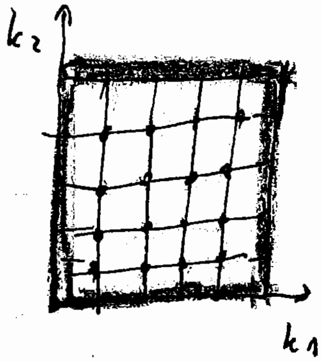
$$d_k = f_k - \alpha f_{k+1} - \alpha f_{k-1}$$

$$E d_k^2 = \sigma^2 + 2\alpha^2\sigma^2 - 2\alpha\sigma^2\rho_{k,k+1} - 2\alpha\sigma^2\rho_{k,k-1} + 2\alpha^2\rho_{k+1,k-1}$$

$$= \sigma^2(1 + 2\alpha^2 - 4\alpha\rho + 2\alpha^2\rho^2) \text{ als Fn. von } \alpha!$$

Minimierung: $\frac{\partial}{\partial\alpha} = 0$ : $\alpha - \rho + \alpha\rho^2 = 0$ , $\alpha = \frac{\rho}{1+\rho^2}$

$$\rightarrow E(d_k^2) = \sigma^2 \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}$$




$f$ bekannt: ✓

"nicht kausal"

1st: wird $f$ kodiert
2nd: wird $d$ kodiert

1.) Kausal: ? Codiert wird $d_k$ (bis auf die Ränder!) !

Codierung: $f \rightarrow \begin{cases} f_k - \sum\limits_{l \neq 0} \alpha_l f_{k+l} \quad (= \underline{d_k}) & , k_1, k_2 > 0 \\ f_k & , k_1 \text{ oder } k_2 = 0 \end{cases}$

Rekonstruktion:

$$f_k = \sum_{l \neq 0} \alpha_l f_{k+l} + d_k \qquad , k_1, k_2 > 0$$

$f_k$ bekannt für $k_1$ oder $k_2 = 0$

Beispiel:

$$f_{k_1,k_2} = \overset{= \alpha_{0,-1} = \alpha_{-1,0}}{\alpha}(f_{k_1,k_2-1} + f_{k_1-1,k_2}) - \overset{= \alpha_{-1,-1}}{\beta} f_{k_1-1,k_2-1} + d_{k_1,k_2}$$

Beziehungen zu Diff.gln.:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + a\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + b\, f$$

$$\sim \frac{f_{k_1,k_2} - f_{k_1,k_2-1} - (f_{k_1-1,k_2} - f_{k_1-1,k_2-1})}{h^2} +$$

$$+ a\left(\frac{f_{k_1,k_2}-f_{k_1-1,k_2}}{h}+\frac{f_{k_1,k_2}-f_{k_1,k_2-1}}{h}\right)+b\,f_{k_1,k_2}$$

$$=\left(\frac{1}{h^2}+\frac{2a}{h}+b\right)f_{k_1,k_2}-\left(\frac{1}{h^2}+\frac{a}{h}\right)\left(f_{k_1,k_2-1}+f_{k_1-1,k_2}\right)+\frac{1}{h^2}f_{k_1-1,k_2-1}$$

$$=\left(\frac{1}{h^2}+\frac{2a}{h}+b\right)\underbrace{\left(f_{k_1,k_2}-\alpha\left(f_{k_1,k_2-1}+f_{k_1-1,k_2}\right)+\beta f_{k_1-1,k_2-1}\right)}_{=d \text{ nach Def.!}},$$

falls $\alpha=\dfrac{\frac{1}{h^2}+\frac{a}{h}}{\left(\frac{1}{h^2}+\frac{2a}{h}+b\right)}$, ← Vorfaktor!

$\beta=\dfrac{1}{h^2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{2a}{h}+b\right)}$. Also:

mit diesem $\alpha$ und diesem $\beta$: (→ $\underset{d_{k_1,k_2}}{\text{Dfwird}}$!)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}+a\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)+bf\approx \approx\left(\frac{1}{h^2}+\frac{2a}{h}+b\right)\cdot d}$$

ist hyperbolische Differentialgleichung, Anfangswertproblem.

## 2.) Semikausal:

**Beispiel:** $f_{k_1,k_2}=\alpha\left(f_{k_1-1,k_2}+f_{k_1+1,k_2}\right)+\beta f_{k_1,k_2-1}+d_{k_1,k_2}$

$$\boxed{-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+a\frac{\partial f}{\partial x_2}+bf\approx\left(\frac{2}{h^2}+\frac{a}{h}+b\right)d,}$$

parabolische Dfl. glg.

falls $\alpha=\dfrac{h^2}{2+ha+h^2b}$, $\beta=\dfrac{a}{\frac{2}{h}+a+hk}$

"Anfangs-Randwert-Aufgabe"

## Codierung:

(*): $d_k = -\hat{f}_k + f_k = f_k - \alpha(f_{k-1} + f_{k+1})$ , $k = 1, \dots, N-1$

$\leadsto f_k = \alpha(f_{k+1} + f_{k-1}) + d_k$ , $k = 1, \dots, N-1$ ($f_0, f_N$ bleiben!)

$$T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & & & & 0 \\ -\alpha & 1 & -\alpha & & & \\ & -\alpha & 1 & -\alpha & & \\ & & -\alpha & 1 & & \\ & & & & \ddots & -\alpha \\ 0 & & & & -\alpha & 1 \end{pmatrix}}_{N-1} \Bigg\} \underline{\underline{N-1}} \; ! \quad \hat{=} \; (*)$$

Gleichung im $\mathbb{R}^{N-1}$

!! $\underline{\underline{Tf = d + b}}$ , $f = \begin{pmatrix} \cancel{f_0} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ \cancel{f_N} \end{pmatrix}$ , $d = \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ \cancel{0} \end{pmatrix}$ , $b = \alpha \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_N \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1. \\ \\ \\ \\ \leftarrow N-1. \end{matrix}$

Referenzwerte!

$Tf_k = \begin{cases} d_k , & k = 1, \dots, N-1 \\ f_k , & k = 0, N \end{cases}$

$\underline{\text{Codierung: } f \rightsquigarrow \begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix}} \; !$

## Rekonstruktion:

$\underline{\begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow f} \; !$

Dazu: $\underline{\text{Löse } \; Tf = d + b}$ (T bekannt!)

nach Proseminar I, da ~~Toep~~ $\underline{T \text{ tridiagonal} \; : \; \mathcal{O}(N) \text{ RO's}}$

Alternativ: Aufgabe 25:

$U$ Sinus-Transformation

$U^T T U = \Lambda$ , $\Lambda = (\lambda_n)$ ,

$\lambda_k = 1 + 2\alpha \cos \frac{k\pi}{N}$ , $k = 1, \dots, N-1$

$$\mathcal{U}\Lambda\mathcal{U}^T f = d+b$$

$$g := \mathcal{U}^T f = \Lambda^{-1}\mathcal{U}^T(d+b) \quad \leftarrow \text{Codierung}$$

$$f = \mathcal{U} g \quad \leftarrow \text{Rekonstruktion} \qquad \square$$

<u>Beziehung zu Dgl.:</u>

Sei $h$ Pixelabstand

Berechne

$$= \frac{1}{\alpha h^2} d_k = \frac{1}{\alpha h^2} f_k - \frac{1}{h^2}(f_{k-1}+f_{k+1}) \quad =: q$$

$$\left(\frac{1}{\alpha h^2} T f\right)_k = \underbrace{\frac{1}{h^2}\left(-f_{k-1}+2f_k-f_{k+1}\right)}_{\text{aus Numerik I bekannt: } \approx -f''(x_k)} + \frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{\alpha}-2\right) f_k \quad \neq 0$$

$x_k$ = k-tes Pixel, $f(x_k) = f_k$

Also:

$$\left.\begin{aligned} Tf = d+b \iff -f'' + qf &= d \\ f(0) &= f_0 \\ f(hN) &= f_N \end{aligned}\right\} \text{Randwertaufgabe!}$$

($f(0)=f_0$, $f(hN)=f_N$ $\hat{=}\ b$)

geht zurück auf Jain ~ 1978

entspricht Energie eines stochastischen Prozesses!

(Num. Bildv. 10.12.90)

Im 1D war ja Tridiagonalsystem $Tf = d + b$ zu lösen!

RCB in 2D:

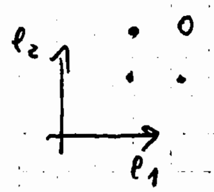
$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Schätzwert $\quad \alpha_\ell$ geeignet, $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$

$$\hat{f}_k = \sum_{\ell \neq 0} \alpha_\ell f_{k+\ell} \quad , \quad \leftarrow \text{vgl. S. 83!}$$

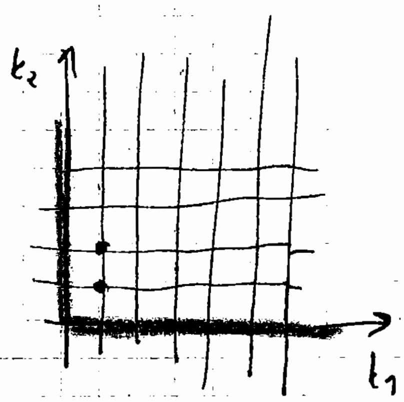
$$f_k = \hat{f}_k + d_k \qquad d_k := f_k - \hat{f}_k$$

$\alpha_\ell$:




$\alpha_{\ell_1,\ell_2} = 0 \quad , \ell_1 > 0 \, , \ell_2 > 0$

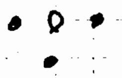
($\Rightarrow \hat{f}_k$ unabh. von $f_{k+\ell} \; \forall \ell = \begin{pmatrix} 0 \\ [illegible] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [illegible] \\ 0 \end{pmatrix}$ !!) ?




kausal

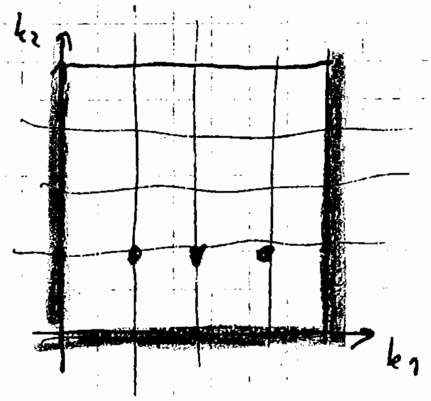
f bekannt: /

$\alpha_\ell$:




$\alpha_{\ell_1,\ell_2} = 0$ für $\ell_2 > 0$

(d.h. $\hat{f}_k$ unabh. von rechten, linken Nachbarn?) ?




f bekannt: /

"semikausal"

3.) Nichtkausalen:

Beispiel: $$f_{k_1,k_2} = \alpha\left(f_{k_1+1,k_2} + f_{k_1-1,k_2} + f_{k_1,k_2+1} + f_{k_1,k_2-1}\right) + d_{k_1,k_2}.$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial k_2^2} + af \approx \left(\frac{4}{h^2}+a\right)\left\{f_{k_1,k_2} - \alpha\left(f_{k_1+1,k_2} + \ldots + f_{k_1,k_2-1}\right)\right\}$$

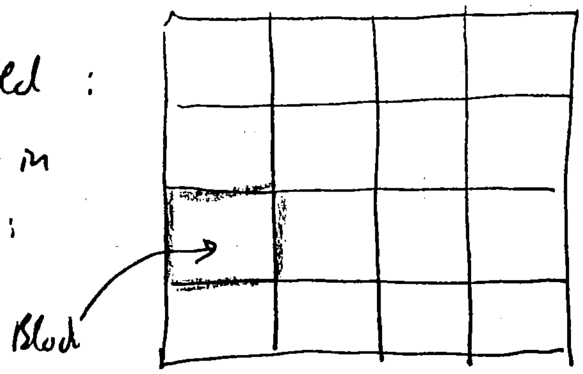
$$= \left(\frac{4}{h^2}+a\right) d$$

falls $\alpha = \frac{1}{4+ah^2}$

ist Elliptische Dgl., Randwertproblem

Praktische Anwendung:

Bild: aufgeteilt in Blöcke:




als DGL ?!

Löse für die einzelnen Blöcke separat und setze hinterher die Lsg. zusammen.

→ "Tiling-Effekt" tritt dabei auf,

etwa Unstetigkeit an Blockrändern?

# §4 Bildanalyse

$f$ Bild, $g$ Objekt (= Bild)

Frage: Kommt $g$ in $f$ vor?

## 1.) $g$ = Punkt:

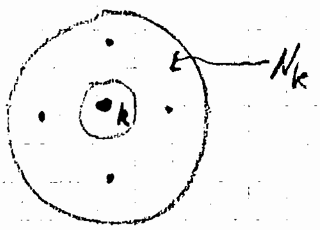
$$d_k := f_k - \frac{1}{p} \sum_{\ell \in N_k} f_\ell$$

, $N_k$ = Menge der benachbarten Pixel zu $k$

$k \notin N_k$, ~~$p = \# N_k$~~

$p = |N_k|$

z.B.:



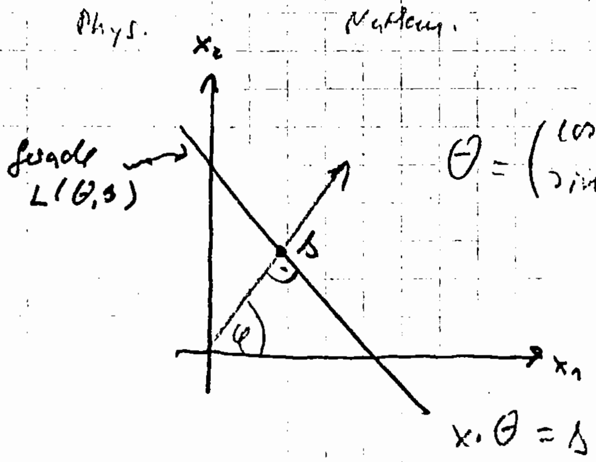

; $p = 4$

$$k \text{ Punkt} \iff |d_k| \geq d$$

## 2.) $g$ = Gerade:

Hough - (Radon -) Transformation:

↗ Phys. ↑ Mathem.




$$\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$x = s\,\theta + t\,\theta^{\perp}$$

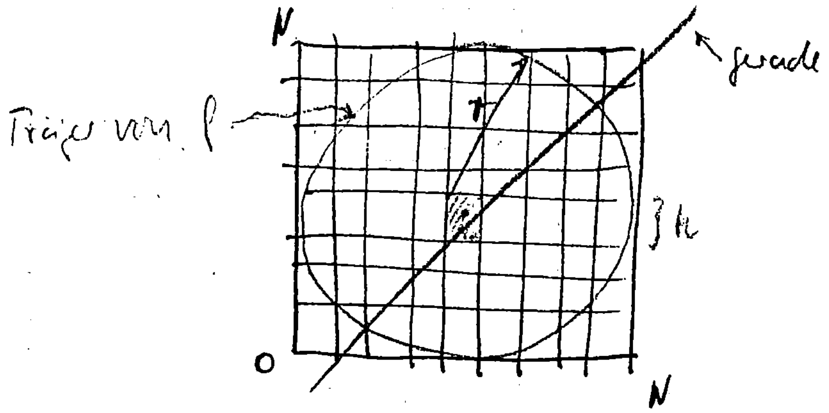
$$\theta^{\perp} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Anm: $(\theta, s) \iff (-\theta, -s)$ ← beschreiben die selbe Gerade!

$$\underline{(Rf)(\theta,s)} = \int_{x\cdot\theta=s} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\theta + t\theta^{\perp})\,dt$$

( <u>Radon-Transformation</u> )

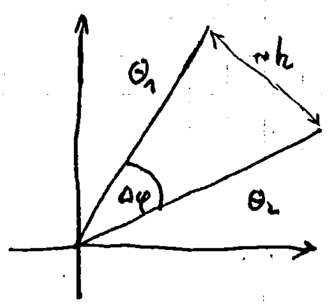
Geraden in $f$ ≙ Punkten in $Rf$




Die Fn. $f$ sei konstant in jedem Quadrätchen
(z.B. einen ~~bel.~~ fest. Fns.wert innerhalb dieses Quadrätchens!)

$$Rf(\theta,s) = \sum_{l} |L(\theta,s) \cap \mathrm{Pixel}_l|$$

$s = hl$




$r \sin \Delta\varphi \sim r\,\Delta\varphi = h$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j \\ \sin\varphi_j \end{pmatrix}$$

$O(N^3)$ Operationen!

$\varphi_j = \Delta\varphi \cdot j$

Einige Fourier-Deskriptoren:

3.) g beliebiges Objekt:

(a) Sind f und g identisch bis auf Translation?

→ Fourier-Transf.: $\hat{f}$

$$f_a(x) = f(a+x) \Rightarrow \hat{f}_a(\xi) = e^{i\xi\cdot a}\,\hat{f}(\xi)$$

$$|\hat{f}_a(\xi)| = |\hat{f}(\xi)|$$

Also: Falls ja, folgt: $|\hat{f}(\xi)| = |\hat{g}(\xi)|$.

(b) Gehen f und g durch Bewegungen auseinander hervor?
(Transl. + Rotation)

$$N_f(\rho) = \int_{S^1} |\hat{f}(\rho\omega)|\,d\omega \quad , \quad S^1 = \text{Einheitssphäre in } \mathbb{R}^2$$

Falls ja $\Rightarrow N_f = N_g$.

(c) Geht f aus g durch Streckung (+ Translation) hervor?

$f_r(x) = f(rx)$, $\hat{f}_r(\xi) = r^{-2}\,\hat{f}(\xi/r)$ in 2-dim.

$$P_f(\omega) = \int_0^\infty |\hat{f}(\rho\omega)|\,\rho\,d\rho \quad , \omega \in S^1$$

$$P_{f_r}(\omega) = \int_0^\infty |\hat{f}_r(\rho\omega)|\,\rho\,d\rho = r^{-2}\int_0^\infty |\hat{f}(\tfrac{\rho}{r}\omega)|\,\rho\,d\rho$$

$$(\tfrac{\rho}{r} = \rho') \qquad = r^{-2}\,r^2 \int_0^\infty \hat{f}(\rho'\omega)\,\rho'\,d\rho' = P_f(\omega)$$

Falls ja $\Rightarrow P_f = P_g$.

(d) Gehen $f$ und $g$ durch Ähnlichkeit auseinander hervor?

$$\underline{T_f} = \int_{S^1} P_f(\omega)\, d\omega$$

(siehe Üb.aufgabe 30)

(Num. Bildv. 14.12.90)

## 4. Erkennen von Texturen:

Textur = doppelt periodische Fn.

Auf Periodizität überprüfen:

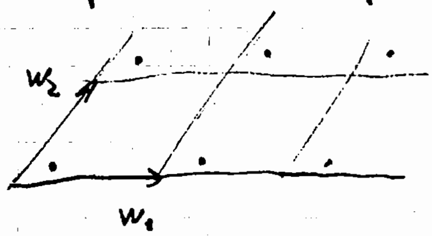
**$f$ $2\pi$-periodisch** in beiden Argumenten, d.h.

$$f(x) = f(x + 2\pi \ell)\ , \ell \in \mathbb{Z}^2$$

$$\rightarrow \quad \hat{f}(\xi) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_k \, \delta(\xi - k) \quad , \quad \hat{f}_k = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} f(x)\, e^{-ix\cdot k}\, dx$$

d.h. es sind nur noch Peaks im Bild festzustellen.
Dieses Problem ist bereits gelöst.

**$f$ $W$-periodisch**, $W$ $(2,2)$-Matrix, nicht singulär
d.h. $f(x + W\ell) = f(x) \ \forall \ell \in \mathbb{Z}^2$




$$f_{W/2\pi}(x) = f\left(\frac{W}{2\pi} x\right)$$

$f_W$ ist $2\pi$-periodisch in beiden Argumenten.

$$f_{W/2\pi}(x + 2\pi\ell) = f\left(\frac{1}{2\pi} W (x + 2\pi \ell)\right) = f\left(\frac{1}{2\pi} W x\right) = f_{W/2\pi}(x)$$

$$\hat{f}_{W/2\pi}(\xi) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_k \, \delta(x - 2\pi k)$$

Aufgabe 7 : $\hat{f}_{W/2\pi}(\xi) = c \, \hat{f}\left((W/2\pi)^{-T} \xi\right)$

$$= c\, \hat{f}(2\pi W^{-T} \xi)$$

$$\hat{f}(2\pi W^{-T}\xi) = c_2 \sum_k \hat{f}_k \, \delta(\xi - 2\pi k)$$

$$\delta_A g := \int \delta(A\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\det(A)} \int \delta(\xi')\, g(A^{-1}\xi')\, d\xi' = \frac{1}{\det(A)}\, g(0)$$

$$A\xi = \xi'$$

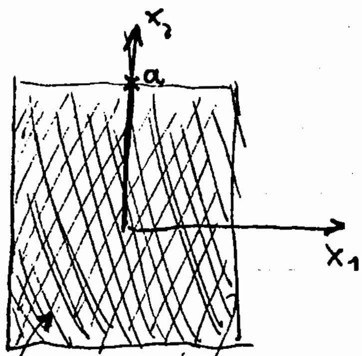
$$\delta_A = \frac{1}{\det A}\, \delta$$

$$\hat{f}(\xi') = c_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_k \, \delta\left(\frac{1}{2\pi} W^T \xi' - k\right) =$$

$$= c_3 \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_k \, \delta(\xi - 2\pi W^{-T} k)$$

d.h. $\hat{f}$ hat "Pkte" in den Punkten des zu $W\mathbb{Z}^2$ reziproken Gitters.

Praktisch kann $\hat{f}$ nicht berechnet werden (da man die Periode ja nicht kennt!)




Textur

$$\chi_{1/a}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-a,a]^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h. man legt ein hinreichend großes "Fenster" über die Textur und bildet danach die Fourier-Transformierte:

$$(f\chi_{1/a})^\wedge = c \, \underset{\text{vgl. oben!}}{\hat{f}} * \hat{\chi}_{1/a}$$

$$\delta_{-y}(\xi) = \delta(\xi - y)$$

$$\delta_{-y} * \hat{\chi}_{1/a} = \int \delta(\xi - y - \eta)\, \hat{\chi}_{1/a}(\eta)\, d\eta = \hat{\chi}_{1/a}(\xi - y)$$

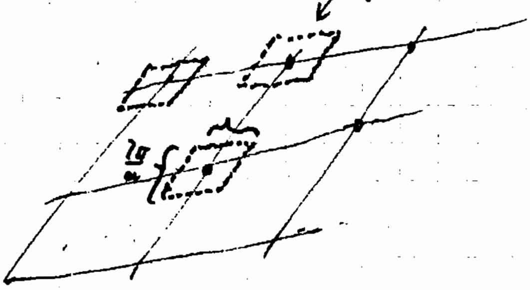
$$\hat{f} * \hat{\chi}_{1/a} = c_5 \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \hat{f}_k \, \hat{\chi}_{1/a}(\xi - 2\pi W^{-1}k)$$

$$\left( \hat{\chi}_{1/a}(\xi) = c_6 \operatorname{sinc}(a\xi) \right)$$

$$= c_7 \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \hat{f}_k \operatorname{sinc}\left(a(\xi - 2\pi W^{-1}k)\right)$$

Reziprokes Gitter:

selbst klein im Vergleich zu den Maschen



Punkte, falls $\frac{2\pi}{a}$ hinreichend klein, d.h.
falls $[-a,+a]^2$ viele Fundamentalbereiche des Gitters $W$ enthält.

## 5. Sind zwei Konturen gleich (bis auf Bewegungen)?

(a) $\Gamma : x = \gamma(s)$ $\quad 0 \le s \le L$ = Länge von $\Gamma$

$s$ = Bogenlänge

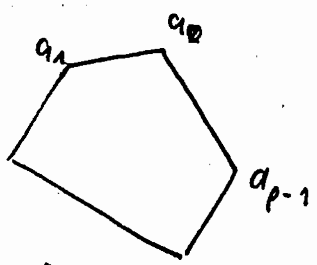
$$\leadsto \underbrace{|\dot{\gamma}|}_{=\sqrt{\left(\frac{d\gamma_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{ds}\right)^2}} = 1$$

$$\delta_\Gamma f = \int_\Gamma f = \int_0^L f(\gamma(s))\, ds$$

$$\hat{\delta}_\Gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L e^{-i\xi\cdot\gamma(s)}\, ds$$

Berechne also $N, P$, usw. (Invarianten)

(b) $\Gamma$ Polygonzug, erzeugt von $a_0, \ldots, a_{p-1}$




$$\sum_{j=0}^{p-1} \delta(x - a_j)$$

Besser: $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix} \underset{\text{identifiziere}}{\Longleftrightarrow} a_{1j} + i a_{2j} =: a_j \in \mathbb{C}$

dann: $\hat{a}_k = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi i jk/p} a_j$ DFT!

Translation: $\left.\begin{array}{l} a_j \mapsto a_j + b \\ \hat{a}_k \mapsto \hat{a}_k + b\,\delta_k \end{array}\right\}$ nicht schön

besser:

Normiere $a_j$: $b = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} a_j$ (damit Schwerpkt des Polygons im Nullpkt)

ersetze $a_j \to a_j - b$

Drehung: $\underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{a_j}} \to U(\varphi) \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{a_j}}$, $U(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

in $\mathbb{C}$: $a_j \longrightarrow e^{i\varphi} a_j$

$\Rightarrow \quad \hat{a}_k \longrightarrow e^{i\varphi} \hat{a}_k$, d.h. $|\hat{a}_k|$ invariant bzgl. Drehung

Bei Veränderung der Numerierung:

$$\hat{a}_k \longrightarrow \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi i j k/p}\, a_{\underbrace{j+s}_{j'}} \qquad (a_p = a_0 \ldots \text{usw.})$$

nach Umnumm.: $$\rightsquigarrow \frac{1}{p}\, e^{2\pi i k s'} \underbrace{\sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi i k (j'-s)/p}\, a_j}_{p\hat{a}_k}$$

d.h. $|\hat{a}_k|$ hängt nicht ab von Numerierung

Bezeichnung dieser Verfahren:

FD ( Fourier Descriptor )

Da dort überall FT mit im Spiel!

Weiterer Fourier Descriptor für Kurven $T$; $\longrightarrow$ Übungen.

6. Invarianten, die auf Momenten basieren:

$$m_k(f) := \int x^k f(x)\, dx \quad , \quad x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2}$$

Translation:

$$m(f) := \frac{1}{m_{00}} \int x\, f(x)\, dx \quad , \quad m_{00} := \int f(x)\, dx$$

$\Rightarrow$ $m$ ist Baryzentrum ("Schwerpunkt")

$$f_y(x) = f(x-y)$$

$$\Rightarrow m(f_y) = \frac{1}{m_{00}} \int x\, f(x-y)\, dx = \frac{1}{m_{00}} \int (x'+y)\, f(x')\, dx'$$

$$= m(f) + y$$

Zentrierte Momente: $\mu_k(f) = \int (x - m(f))^k f(x)\, dx$ .

Transl: $\mu_k(f_y) = \int (x - m(f_y))^k f_y(x)\, dx = \int (x - m(f) - y)^k f(\overbrace{x-y}^{x'})\, dx$

$$= \int (x' - m(f))^k f(x')\, dx' = \mu_k(f)$$

$\Rightarrow$ $\mu_k$ invariant bzgl. Translationen!

Rotation: $f_U(x) = f(U^{-1}x)$

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mu_k(f_U) = \int (x - m(f_U))^k f_U(x)\, dx =$$

$$= \int (x - Um)^k f(\underbrace{U^{-1}x}_{x'})\, dx$$

$$= \int (Ux' - Um)^k f(x')\, dx' = \int (U(x - m(f)))^k f(x)\, dx$$

$$\rightsquigarrow \mu_{(2,0)} + \mu_{(0,2)} \overset{(f_U)}{=} \int \left( (U(x-m))_1^2 + (U(x-m))_2^2 \right) f(x)\, dx$$

$$= \int \|U(x-m)\|^2 f(x)\, dx$$

↑ eukl. Norm

$$\overset{U \text{ unitär}}{=} \int \|x - m\|^2 f(x)\, dx = (\mu_{(2,0)} + \mu_{(0,2)})(f)$$

$\Rightarrow$ d.h. $\mu_{(2,0)} + \mu_{(0,2)}$ ist invariant gegenüber Bewegungen. (Transl. + Rot.)

Weitere Invarianten:

$$(\mu_{(2,0)} - \mu_{(0,2)})^2 + 4\mu_{(1,1)}^2 \qquad (\mu_{(3,0)} + \mu_{(1,2)})^2 + (\mu_{21} + \mu_{03})^2$$

$$(\mu_{(3,0)} - 3\mu_{(1,2)})^2 + (3\mu_{(2,1)} - \mu_{(0,3)})^2$$

(Num. Bildver. 17.12.)

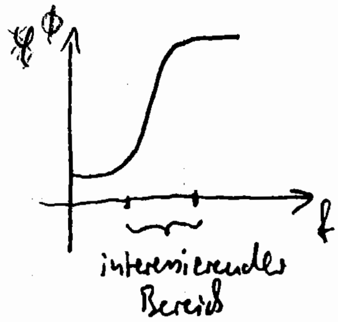
# §5 Bildaufbereitung ( Image Enhancement )

## 1. Kontrastverbesserung

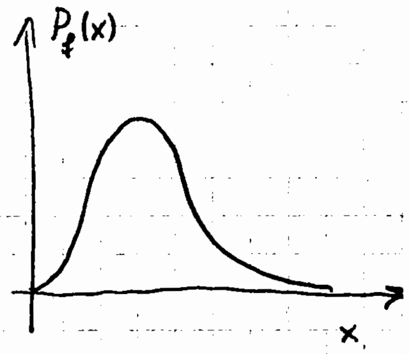
Änderung der Grauwertskala $\quad g = \Phi(f)$

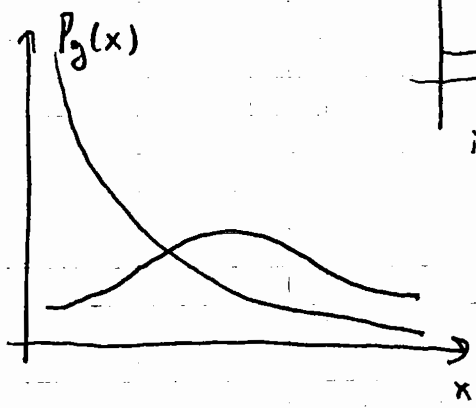
(⇝ bessere Grauwertverteilung )
(für's Auge besser identifizierbar ) $\quad \Phi$ monoton wachsend

Systematische Konstruktion von $\Phi$ auf Grund von Histogrammen :




$f$ , Dichte $P_f$

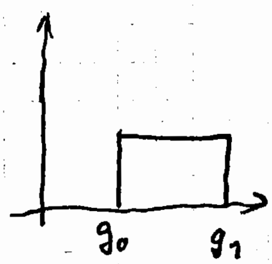



**Vorgabe:** $P_g$ . **Gesucht:** $\Phi$

$$\int_0^{\phi(x)} P_g(x')\,dx' = P\big(g \le \underset{\phi(f(\omega)),\ \phi \text{ monoton!}}{\phi(x)}\big) = P(f \le x) = \int_0^x P_f(x')\,dx'$$

**Beispiele:** 1) $P_g(x) = \begin{cases} 0 & , x \le g_0 \\ \frac{1}{g_1 - g_0} & , g_0 \le x \le g_1 \\ 1 & , x \ge g_1 \end{cases}$




$$\rightsquigarrow \underline{\phi(x) = (g_1 - g_0)\, P(f \le x) + g_0}$$

$$\left( \Rightarrow P(f \le x) = \frac{\phi(x) - g_0}{g_1 - g_0} \right)$$

$$\int_0^{\phi(x)} P_g(x')\,dx' = \left\{ \begin{array}{ll} 0 , & \phi(x) \le g_0 \\ (\phi(x)-g_0)/(g_1-g_0) , & g_0 \le \phi(x) \le g_1 \\ 1 , & \phi(x) \ge g_1 \end{array} \right\} = P(f \le x)$$

2.) $$P_g(x) = \begin{cases} 0 & , x \le g_0 \\ \alpha \exp\{-\alpha(x-g_0)\} & , x \ge g_0 \end{cases}$$

$$\underline{\phi(x) = g_0 - \frac{1}{\alpha} \ln(1 - P(x \le f))}$$

## 2. Kontrastverschärfung (Hervorheben kleiner Details)

(a) Direkt:

$$\underline{g(x) = \sum_k a_k f(x - hk)}$$

z.B. Teufel S.102 unten:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \;\hat{=}\; \underset{\text{Laplace}}{\Delta}$$

gepixelt: $$g(lh) = \sum_k a_k f((k-l)h)$$

Nur diese werden berechnet.

Schreibe: $\underline{g(x) = S * f(x)}$ im Ortsraum mit $\underline{S(x) = \sum_k a_k \delta(x - hk)}$

$$\rightsquigarrow \hat{g}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{S}(\xi)\hat{f}(\xi) ,$$

$$\hat{S}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \sum_k a_k e^{-ih\xi\cdot k}$$

$$\rightsquigarrow \hat{g}(\xi) = \underbrace{\sum_k a_k e^{-ih\xi\cdot k}}_{=:\,H(\xi)} \cdot \hat{f}(\xi)$$ im Frequenzraum

$H(\xi)$ ← soll Hochpaßeigenschaft haben!

agiert im Frequenzraum!

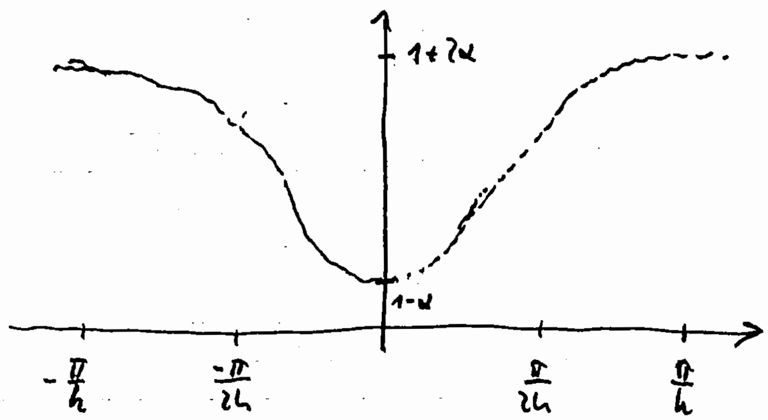
Ziel: $H$ soll <u>Hochpaß-Filter</u> werden. (Also die hohe Frequenzen (Rauschen) soll schwach bleiben.

## Beispiele:

1) 1 Dimensional

$$\underline{g(x) = f(x) - \alpha\,(f(x-h) + f(x+h))}$$

$$\rightsquigarrow \underline{H(\xi)} = 1 - \alpha\,(e^{-ih\xi} + e^{ih\xi}) = 1 - 2\alpha\cos(h\cdot\xi)$$




$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$

2.) 2 Dimensional

$$\underline{g(x) = f(x) - \alpha\Big(f\big(x - h\tbinom{0}{1}\big) + f\big(x - h\tbinom{0}{-1}\big)}$$
$$\underline{+ f\big(x - h\tbinom{1}{0}\big) + f\big(x - h\tbinom{-1}{0}\big)\Big)}$$

$$\rightsquigarrow \underline{H(\xi)} = 1 - 2\alpha\,(\cos h\xi_1 + \cos h\xi_2) \quad , 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$$

z.B. $\alpha = \frac{1}{4}$ : $\boxed{\begin{matrix} & -\frac{1}{4} & \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ & -\frac{1}{4} & \end{matrix}} = a \quad \underline{\sim -\frac{1}{4}\Delta}$ (eben die elas.ische Form!)

mit $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

(4.) Im Fourier-Raum:

$$\hat{g}(\xi) = H(\xi)\,\hat{f}(\xi) \quad \text{(s.o., a.)!)}$$

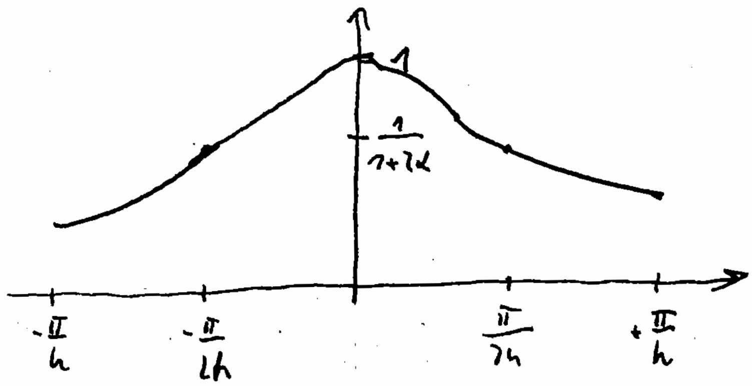
## 3. Glättung:

(a) Direkt: $H(\xi)$ nun Tiefpaß! (Ziel!)
analog zu 2.)! (s.o.)!

Beispiele:

1.) 1D: $g(x) = \frac{1}{1+2\alpha}\left(f(x) + \alpha\left(f(x-h) + f(x+h)\right)\right)$

$$\rightsquigarrow H(\xi) = \frac{1}{1+2\alpha}\left(1 + 2\alpha\cos(h\cdot\xi)\right)$$




$0 \leq \alpha \leq 1/2$

Erweiterung analog zum Hochpaß-(1D)-Fall! Beispiel in 2)

2.) 2D: $g(x) = \frac{1}{1+4\alpha}\left(f(x) + \alpha\left(f\left(x - h\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + \ldots \text{(s.o.)} \ldots\right)\right)$

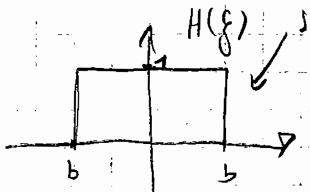
$$\rightsquigarrow H(\xi) = \frac{1}{1+4\alpha}\left(1 + 2\alpha\cos(h\cdot\xi_1) + 2\alpha\cos(h\cdot\xi_2)\right)$$

## (b) Im Fourier-Raum: $\hat{g} = H \hat{f}$

**Beispiele:**

**1.)** $$H(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

← "Ideale Tiefpaß"




scharf abgeschnitten ⇒ "ringing"-Effekt tritt auf

← Tiefpaß-Filter!

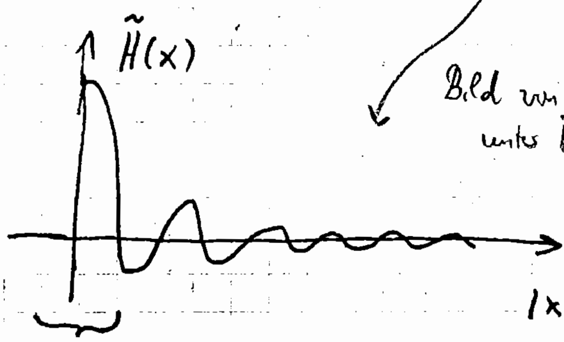
$$g = (2\pi)^{n/2}\, \tilde{H} * f$$

inverse F-Trafo

z.B. $f = \delta \Rightarrow g = (2\pi)^{n/2}\, \tilde{H}$

$n=2$: $$\tilde{H}(x) = c\, \frac{J_1(b|x|)}{b|x|}$$

$J_1$ Besselfkt.

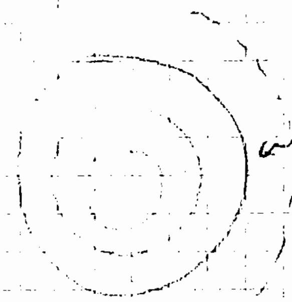



$\frac{2j_1}{b}$

Bild von $\delta$ (Dirac-Impuls) unter $\tilde{H}*$. !

$j_1$ = kleinste Nullstelle von $J_1$

2 dim:



"ringing" außerhalb ist unerwünscht

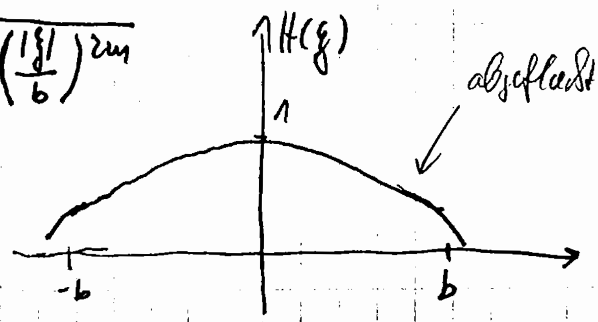
soll schneller abfallen

"Ringing" tritt auf, unerwünscht! Deshalb:

→ **2.) Butterworth-Filter der Ordnung m**

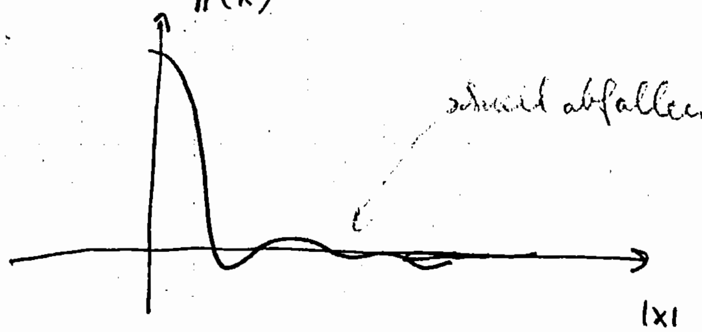
$$H(\xi) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\xi|}{b}\right)^{2m}}$$

(vgl. auch S. 107?)




abgeflacht

$\tilde{H}(x)$ ← Also wieder Bild von Dirac-$\delta$! $\quad \tilde{H}(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} g$, falls $f = \delta$




## (c) Median-Filter:

8 9 11 12
eines von beiden?

z.B.:

$$\begin{matrix} & 8 & \\ 9 & 10 & 12 \\ & 11 & \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} & 8 & \\ 9 & 11 & 12 \\ & 11 & \end{matrix}$$

also ein Median ~~Mittelwert~~ der umliegenden

~~oder 10 ?~~

## 4. Coefficient rooting, Cepstrum (Kunstwort aus Spectrum)

coeff. rooting $\quad \hat{g} = \dfrac{\hat{f}}{|\hat{f}|} |\hat{f}|^{\alpha} \quad , \quad 0 \leq \alpha < 1$

Cepstrum $\quad \hat{g} = \dfrac{\hat{f}}{|\hat{f}|} \log(a + b|\hat{f}|)$

## 5. Image restoration (au?) Wichtig!

$f(y)$ Bild

beobachtbar aber nur: $\quad g(x) = \int \underbrace{B(x,y)}_{\text{blurring-function}} f(y)\,dy + \underbrace{n(x)}_{\text{Rauschen}}$

verwackeln, trüben, verwischen?

Problem: $g$, $B$ gegeben, $f$ gesucht (für $n$ wähle z.B. weißes Rauschen ⇒ $\hat{n}$ = const.!)

$$f = \delta \; : \qquad \int B(x,y)\, f(y)\, dy = \underbrace{B(x,0)}_{\text{point spread - function}}$$

$$B(x,y) = \tilde{B}(x-y)$$ (d.h. nur von Differenz abhängig ist !

wird wieder aufgelöst!

( Typisches Beispiel: $\tilde{B}(x) = c\, e^{-\left|\frac{x}{r}\right|^2}$ x stellt für $x'-y'$ ? )

$$\rightarrow \; g = B * f + n$$

$$\hat{g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{B} \hat{f} + \hat{n} \; , \qquad \hat{f} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\hat{g} - \hat{n}}{\hat{B}}$$

aber: $\hat{n}$ unbekannt !

$$\hat{f} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\hat{g}}{\hat{B}} \overset{+\,?}{=} \frac{-\hat{n}}{\hat{B}}$$

$\hat{B}(\xi) \longrightarrow 0$ sehr schnell für $|\xi| \to \infty$

$\hat{n}$ : Typisch $|\hat{n}| \approx \sigma$ (klein) (vgl. S. 110 Mitte)

$\Rightarrow \left|\frac{\hat{n}}{\hat{B}}\right|$ ist sehr groß für große $|\xi|$

(Num. Bildv. 30.12.90)

Butterworth-Filter der Ordnung $n$ und Abschneidefrequenz $b$:

$$H(\xi) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\xi|}{b}\right)^{2n}}$$ , vgl. S. 104! u. S. 110! (vgl. S. 110 !)

$$\check{H}(x) \overset{\text{Aufg. 7}}{=} \int_0^\infty r\, J_0(r|x|)\, \frac{dr}{1+\left(\frac{r}{b}\right)^{2n}}$$

$n=1$: Hankel-Nicholson-Integral

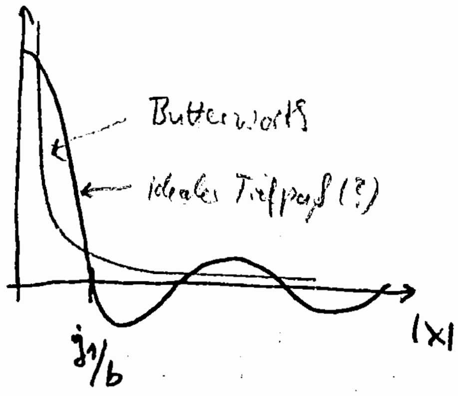
Formel 11.4.44 Abram. Stegun : $= K_0(|x|b)$,

$K_0$ modifizierte Besselfn.

$$K_0(r) \sim \begin{cases} \ln r & , r \to 0 \\ e^{-r} & , r \to \infty \end{cases}$$

Vgl. mit:

$\frac{J_1(|x|b)}{|x|b}$ (ideales Tiefpaß) :




$j_1 = 3.83171$

(30.11.90)



## 5.) Bildrestauration

$$g = 2\pi^{-\frac{n}{2}} B * f + n$$

$$\hat{g} = \hat{B}\hat{f} + \hat{n}$$

$$\rightarrow \hat{f} = \frac{\hat{g} - \hat{n}}{\hat{B}}$$

funktioniert nicht, da $\hat{B}$ evtl. klein, $\hat{n}$ aber groß $\Rightarrow$ Ausdruck sehr groß

!

Stattdessen:

**Wiener-Filter**: $W$, $\underbrace{\hat{f}_R = \hat{W}\hat{g}}_{\text{Rekonstruktionsvorschrift}}$ Wähle $\hat{W}$ so, daß der Fehler:

$$\hat{f}_R - \hat{f} = \hat{W}(\hat{B}\hat{f} + \hat{n}) - \hat{f}$$

$$= (\hat{W}\hat{B} - 1)\hat{f} + \hat{W}\hat{n} \quad \text{klein wird!}$$

$(a+b)^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$

$$\underbrace{|\hat{f}_R - \hat{f}|^2}_{} \leq 2\underbrace{\left(|\hat{W}\hat{B} - 1|^2|\hat{f}|^2 + |\hat{W}\hat{n}|^2\right)}_{}$$

Fehler zwischen gestörtem und korrektem Bild, soll im folgenden minimiert werden!

statistischer Anteil

$= E|\hat{f}_R - \hat{f}|^2$ ist zu minimieren!

falls $n$ „weißes Rauschen"

vgl. auch S. 94 "Codierung", Herleitung von $V_f$!

**Lemma**: Sei $F(w) = |w - z|^2 + \omega|w|^2$, $w \in \mathbb{C}$, $\omega \geq 0$.

$$\Rightarrow \min_w F(w) = \frac{\omega}{1+\omega}|z|^2 \text{ wird angenommen für } w = \frac{z}{1+\omega}.$$

**Beweis**: $w = u + iv$, $z = x + iy$

$$F(w) = (u-x)^2 + (v-y)^2 + \omega(u^2 + v^2)$$

$\nabla F = 0$:

$$\Rightarrow \quad 2(u-x) + 2\omega u = 0$$

$$2(v-y) + 2\omega v = 0$$

$$\Rightarrow \quad w - z + \omega w = 0 \quad \rightarrow \text{Bew.} \quad \blacksquare$$

Wende Lemma an auf

$$F(\hat{w}) = |\hat{w} - \overset{z}{\hat{B}^{-1}}|^2 + \overset{\omega}{\left|\frac{\hat{n}}{\hat{B}\hat{f}}\right|^2} |\hat{w}|^2$$

$\curvearrowright$ minimal für $\hat{w} = \dfrac{1}{1+\left|\frac{\hat{n}}{\hat{B}\hat{f}}\right|^2} \hat{B}^{-1}$

Es folgt: $\Longrightarrow$ "Wiener-Filter" $\hat{w} = \dfrac{\overbrace{|\hat{B}|^2}^{\bar{\hat{B}}\hat{B}}}{|\hat{B}|^2 + \left|\frac{\hat{n}}{\hat{f}}\right|^2} \hat{B}^{-1}$

Lemma(?) $\rightarrow$ $F(\hat{w}) = \dfrac{\left|\frac{\hat{n}}{\hat{B}\hat{f}}\right|^2}{1+\left|\frac{\hat{n}}{\hat{B}\hat{f}}\right|^2} |\hat{B}^{-1}|^2$

$\hat{w} = \dfrac{\bar{\hat{B}}}{|\hat{B}|^2 + \left|\frac{\hat{n}}{\hat{f}}\right|^2}$ — konj. komplex

mit der Fehlerabschätzung:

Fehler (Abschätzung): $|\hat{f}_R - \hat{f}|^2 \leq 2 |\hat{B}\hat{f}|^2 F(\hat{w}) =$

$$= 2 \frac{\left|\frac{\hat{n}}{\hat{B}\hat{f}}\right|^2}{1+\left|\frac{\hat{n}}{\hat{B}\hat{f}}\right|^2} |\hat{f}|^2$$

$\dfrac{|\hat{B}\hat{f}|}{|\hat{n}|} \triangleq$ Signal-Rausch-Verhältnis

wird im folgenden zugrunde gelegt!

Weißes Rauschen: $E\, n(x)\, n(x-y) = \sigma^2 \delta(y)$ (Stochastik!)

d.h. Werte an benachbarten Stellen zueinander unabhängig, "unkorreliert"

Hier: $$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n(x_k)\, n(x_k-y) \sim \sigma^2 \delta(y)$$

$$\rightsquigarrow \quad \int n(x)\, n(x-y)\, dx = \sigma^2 \delta(y)$$

macht zunächst keinen Sinn, deshalb:

$$n * \check{n} = \sigma^2 \delta \qquad \underline{\text{F.Tr.}} \Rightarrow \quad \hat{n}\,\bar{\hat{n}} = c\,\sigma^2\, 1$$

$$(\check{n}(y) = n(-y)) \qquad \Rightarrow \quad |\hat{n}| = \text{konst.}$$

**Also:** weißes Rauschen $:\Longleftrightarrow$ Fourier-Transformierte ist konstant.

(≙ Gleichverteilung aller Frequenzen!)

Im Folgenden:

Vor:
- $\hat{n}$: $|\hat{n}| = \sigma$ konstant
- $\hat{f}$: typisch: $|\hat{f}(\xi)| \sim |\xi|^{-\beta}$, $\beta \sim 3/2$
- $\hat{B}$: bekannt

$\hat{W}$ hängt von $\hat{n}, \hat{f}$ und $\hat{B}$ ab!

**Beispiele:**

**1.)** $B = (2\pi)^{n/2}\,\delta \quad (n=2)$, d.h. $g = f + n$

$$\hat{B} = 1$$

$\rightsquigarrow$ Wiener: $$\hat{W} = \frac{1}{1+\left|\frac{\sigma}{\hat{f}}\right|^2} \sim \frac{1}{1+\sigma^2|\xi|^{2\beta}}$$

d.h. Wiener-Filter ist hier angenähert der Butterworth der Ordnung $\beta$ (vgl. S. 107!)

**2.)** $$B(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} & \text{für } |x| \le r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\hat{B}(\xi) = \frac{J_1(|\xi| r)}{\pi |\xi| r} \sim c\,|\xi|^{-3/2}$$

$$\cancel{\hat{W}(\xi) = \frac{\left|\frac{\hat{n}}{\hat{f}\hat{B}}\right|^2}{1 + \left|\frac{\hat{n}}{\hat{f}\hat{B}}\right|}}$$

Wiener Filter:

Verhalten bei Nullstellen von $\hat{B}(\xi)$:

(vgl. Bemerkung in Beispiel 4.) am Schluss!)

Wiener: (vgl. S. 103)

$$\hat{W}(\xi) = \frac{|\hat{B}|^2}{|\hat{B}|^2 + \left|\frac{\hat{n}}{\hat{f}}\right|^2} \qquad \hat{B}^{-1} = \frac{\hat{B}^*}{|\hat{B}|^2 + \left|\frac{\hat{n}}{\hat{f}}\right|^2} = 0 \;!$$

für $\hat{B}(\xi) = 0$ !

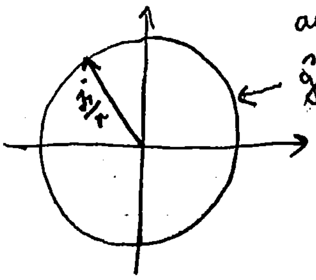
d.h.: Dort ist Rekonstruktion nicht möglich!

(→ Informationsverlust!)

Also: Wo ist $\hat{B}(\xi) = 0$?

vgl. S. 107 unten!

$\hat{B}(\xi) = 0$, falls $|\xi| r = j_1$, $\hat{g} = 3.8\ldots$



auf dem Kreis: $\hat{g} = 0$, $\hat{B}$?

← Hierdurch werden z.B. Linsenfehler modelliert.

3.) $B(x) = c\, e^{-\frac{1}{2}(x/r)^2}$, $r$: "blur spread parameter"

(eigentlich: $e^{-\lambda |x|^{5/3}}$) (bei Luftbild-aufnahmen)

$\hat{B}(\xi) = C'\, e^{-\frac{1}{2}(\xi r)^2}$ ($\neq 0\ \forall \xi$!)

4.) Aufgabe 9:

Bild, bewegt, geschw. $\vec{v}$

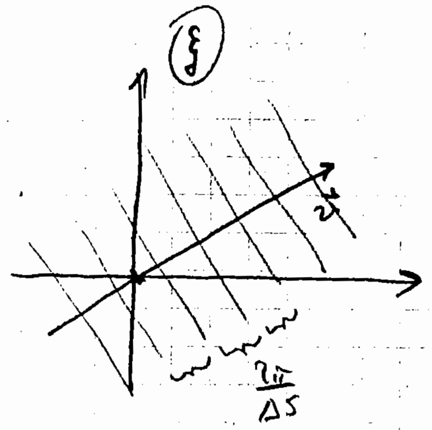
$$\hat{B}(\xi) = c\, e^{i\Delta t \frac{v\cdot\xi}{2}} \cdot \operatorname{sinc}\left(\Delta t \frac{v\cdot\xi}{2}\right)$$

kann 0 werden!

$\hat{B}(\xi) = 0 \iff \Delta t \cdot v \cdot \xi/2 = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$v\cdot\xi = \frac{2k\pi}{\Delta t}, \quad \frac{v}{|v|}\cdot\xi = \frac{2k\pi}{\Delta t\,|v|} = \frac{2k\pi}{\Delta s} \qquad (*)$$

$\Delta s$ = Entfernung, die ein Bildpunkt zurücklegt



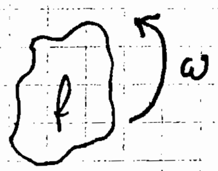

Sei $\xi$ wie in (*). $\hat{f}(\xi)$ ist für diese $\xi$ nicht zu berechnen aus $\hat{g} = \hat{B}\hat{f} + \hat{n}$:

$$e^{i x\cdot\xi} = e^{is\frac{v}{|v|}\xi} \overset{\text{dann}}{=} e^{is\frac{2k\pi}{\Delta s}}$$

$x = s\frac{v}{|v|}$, periodisch mit Periode $\Delta s$

! Diese Pkte sind beim Tomographieren nicht zu bekommen. Wiener Filter setzt sie gleich 0.

5.) (zu Aufgabe 10): Rotation:




$$f(x) = \sum_k f_k(r)\, e^{ik\varphi}, \quad x = r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$g(x) = \int_0^{\Delta t} f(U(t)x)\,dt$$

$$U(t) = \begin{pmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}$$

$$g_k = \frac{1}{ik\omega}\left(e^{ik\omega\Delta t} - 1\right) f_k$$

Falls $k = \frac{2\pi p}{\omega\Delta t}$: $f_k g_k = 0$ durch Wiener Filter.

wieder Frage: ist das sinnvoll? :

$$e^{ik\varphi} = e^{\frac{2\pi i p}{\omega \Delta t}\varphi}$$ , hat Periode $\omega \Delta t$ .

(Num. Bildv. 07.01.91)

# III Bildrekonstruktion

## §1 Das allgemeine Rekonstruktionsproblem

$$g(x) = \int_Y K(x,y)\, f(y)\, dy \quad , x \in X \qquad (K(x,y) \text{ Kernfunktion})$$

ist Integralgleichung 1. Art für $f$.

**Bemerkungen:** 1.) Im allgem. nicht eindeutig lösbar

z.B.: $K \equiv 1$

2.) Selbst wenn eindeutig lösbar, immer noch schwierig.

z.B.: $X = Y = [0, 2\pi]$, $K \in L_2(X \times Y)$

$f_k(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iky}$, $k \in \mathbb{N}$, vollst. ON-System in $[0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \sum_k \underbrace{\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int K(x,y)\, e^{iky}\, dy \right|^2}_{g_k(x)} = \int_0^{2\pi} |K(x,y)|^2\, dy$$

$$g_k(x) = \int K(x,y)\, f_k(y)\, dy$$

$$\int_0^{2\pi} \sum_k |g_k(x)|^2\, dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |K(x,y)|^2\, dy\, dx < \infty$$

$$\sum_k \|g_k\|^2_{L_2(0,2\pi)} < \infty \;, \text{ d.h. } \|g_k\| \to 0 \;, k \to \infty$$

aber: $\|f_k\| = 1 \quad \forall k$

d.h. die Umkehrabb. (wenn sie exist.) ist instabil (d.h. unstetig!)

**Definition:** $F, G$ Hilbert-Räume, $A: F \to G$ linear und stetig.

Das Problem $Af = g$ heißt gut gestellt, falls:

i) $Af = g$ stets eindeutig lösbar (d.h. $\forall g \; \exists f$)

ii.) $f$ hängt stetig von $g$ ab.

Andernfalls heißt $Af = g$ <u>schlecht gestellt</u>.

<u>Bemerkung:</u> Falls statt $g$ nur $g_\delta$ mit $\|g - g_\delta\| \leq \delta$ bekannt,

und falls $Af_\delta = g_\delta$ eindeutig lösbar, ist

$f_\delta - f = A^{-1}(g_\delta - g)$ nicht notwendig klein, selbst wenn $\delta$ klein ist.

<u>Beispiele:</u> 1.) $\underline{(Af)(x) = \int_0^{\Delta t} f(x + tv)\,dt, \quad F = G = L_2(\mathbb{R}^2)}$

Stetigkeit: $|Af(x)|^2 \underset{\text{Schwarzsche Ungl.}}{\leq} \int_0^{\Delta t} 1 \cdot \int_0^{\Delta t} |f(x + tv)|^2\,dt$

$$= \Delta t \int_0^{\Delta t} |f(x + tv)|^2\,dt$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} |Af(x)|^2\,dx}_{= \|Af\|^2} \leq \Delta t \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{\Delta t} |f(x + tv)|^2\,dt\,dx$$

$$= \Delta t \int_0^{\Delta t} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} |f(x + tv)|^2\,dx}_{= \|f\|^2_{L^2}}\,dt = \Delta t^2 \, \|f\|^2_{L^2}$$

da über ganz $\mathbb{R}^2$ integriert $\Rightarrow tv$ irrelevant

$\Rightarrow \|Af\| \leq \Delta t \, \|f\|$, d.h. $\|A\| = \Delta t$, d.h. $A$ stetig (weil beschränkt)

Nach Üb.aufg. 7: $(Af)^\wedge(\xi) = \frac{1}{4\pi} e^{ia} \operatorname{sinc}(a) \hat{f}(\xi)$,

mit $a = \frac{\Delta t \, v \cdot \xi}{2}$

$A^{-1}$: $Af = g \iff \hat{f}(\xi) = \frac{4\pi e^{-ia}}{\operatorname{sinc}(a)} \hat{g}(\xi) \notin L_2 \quad \forall g \in L_2$

(d.h. nicht (eindeutig) lösbar $\forall g$ !)
(wegen sinc-Fkt. im Nenner!)

$\Rightarrow$ <u>Problem ist schlecht gestellt</u>. ((i) verletzt!)

2) Radon-Transformation:

$$\underline{(Rf)(\underset{S^1}{\theta},\underset{\mathbb{R}^1}{s}) = \int_{x\cdot\theta = s} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^1} f(s\theta + t\theta^\perp)\,dt}$$

$$\underline{F = L_2(|x|\le 1)\,,\quad G = L_2(S^1\times\mathbb{R}^1)}$$

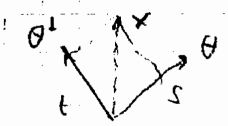
Stetigkeit:

$|s\theta + t\theta^\perp|^2 = s^2+t^2 < 1$

$$|(Rf)(\theta,s)| \le \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} |f(s\theta + t\theta^\perp)|\,dt$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schw.}}{\le} \left(\int_{-\sqrt{\ }}^{+\sqrt{\ }} 1\,dt\right)^{1/2} \int_{-\sqrt{\ }}^{+\sqrt{\ }} |f(s\theta + t\theta^\perp)|^2\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} |(Rf)(\theta,s)|^2\,ds \le 2\cdot\int_{-1}^{+1}\int |f(\underbrace{s\theta + t\theta^\perp}_{=:x})|^2\,dt\,ds$$




$$= 2\int_{|x|<1} |f(x)|^2\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{S^1}\int_{-1}^{+1} |Rf(\theta,s)|^2\,ds\,d\theta \le 4\pi \int_{|x|<1} |f(x)|^2\,dx\,,$$

d.h. $\|Rf\| \le 2\sqrt{\pi}\,\|f\|$ $\Rightarrow$ R beschränkt

Gutgestelltheit! Also: R ist stetig.

Nach Aufgabe 31: $\underline{(Rf)^\wedge(\theta,\sigma) = (2\pi)^{1/2}\hat{f}(\sigma\theta)}$

$\Rightarrow$ R ist injektiv

Aber: $Rf = g$ nicht immer lösbar:

$\underline{g(\theta,s) = g(-\theta,-s)}$, d.h. g ist gerade. (Notw. Beding. an g!)

darüberhinaus:

$$\int_{\mathbb{R}^1} s^m g(\theta,s)\,ds = \int_{\mathbb{R}^1} s^m Rf(\theta,s)\,ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} s^m \int_{\mathbb{R}^1} f(\underbrace{s\theta + t\theta^\perp}_{x})\,dt\,ds \quad , \quad s = x\cdot\theta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} (x\cdot\theta)^m f(x)\,dx = q_m(\theta)$$

Polynom vom Grade $m$ in $\theta$

$\Rightarrow$ **schlecht gestellt** (wegen Bed. (i)!)

Hilfe: (?) → Hilfe: (3)

Ersetze $G$ durch $G_0$ (damit Bed. (i) erfüllt ist!). $= \{ g \in G : g$ gerade, $\int s^m g(\theta,s)\,ds$ ist Polynom vom Grade $m$ in $\theta \}$

$$Rf = g \iff \hat{g}(\theta,\sigma) = (2\pi)^{1/2}\hat{f}(\sigma\theta)$$

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi = \quad (\text{Subst. } \xi = \sigma\theta)$$

$$= \int_{S^1}\int_0^\infty \sigma\,|\hat{f}(\sigma\theta)|^2\,d\sigma = (2\pi)^{-1}\int_{S^1}\int_0^\infty \sigma\,|\hat{g}(\theta,\sigma)|^2\,d\sigma \quad (*)$$

$$\|g\|^2 = \int_{S^1}\int_{\mathbb{R}^1} |g(\theta,s)|^2\,ds\,d\theta$$

$$\overset{\text{Parseval}}{=} \int_{S^1}\int_{\mathbb{R}^1} |\hat{g}(\theta,\sigma)|^2\,d\sigma\,d\theta \qquad = \int_{S^1}\Big[\int_0^\infty + \underbrace{\int_{-\infty}^0}_{\text{da } \hat{g} \text{ gerade Fn} := \int_0^\infty}\Big]$$

$$= 2\int_{S^1}\int_0^\infty |\hat{g}(\theta,\sigma)|^2\,d\sigma$$

Abschätzung $\|f\| \le C\|g\|$ nicht möglich! (wegen des störenden $\sigma$ in (*)?)

also hängt $f$ nicht stetig von $g$ ab

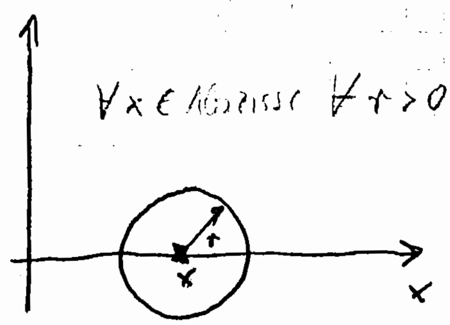
$\Rightarrow$ Hilfe nützt nichts $\Rightarrow$ **Problem definitiv schlecht gestellt.**

da (ii) verletzt!

3.) $K(x,y) = e^{-ix\cdot y}$, also $(Af)(x) = \int e^{-ix\cdot y} f(y)\,dy$

wir wissen: falls $F = G = L_2$ : gut gestellt (Fourier-Transf. bzgl. Isometrie ?!)
($\rightsquigarrow$ MRI)

4.) $(Af)(x,r) = \int_{S^1} f(x + r\theta)\,d\theta$




(z.B. Radar, SAR)
ebenfalls schlecht gestellt.

zur Lösung schlecht gestellter Probleme:
Singulärwertzerlegung (SVD) von A:

$A: F \to G$ linear, stetig, $F, G$ Hilbert
$A^*: G \to F$ linear, stetig, ist def. durch:

$$(Af, g)_G = (f, A^* g)_F$$

$A^*$ heißt Adjungierte zu $A$.

Beispiele: (für Adjungierte!) 1.) $F = \mathbb{C}^m$, $G = \mathbb{C}^n$ : $A^* = \bar{A}^T$

2.) $F = L_2(Y)$, $G = L_2(X)$

$$(Af)(x) = \int_Y K(x,y) f(y)\,dy$$

Adjungierte: $$(Af, g) = \int_X \int_Y K(x,y) f(y)\,dy\ \bar{g}(x)\,dx$$

$$= \int_Y f(y) \int_X K(x,y)\, \bar{g}(x)\,dx\,dy$$

$$= \int_Y f(y) \overline{\int_X \overline{K(x,y)}\, g(x)\,dx}\,dx\,dy \overset{!}{=} (f, A^* g)$$

$$\Rightarrow A^* g(x) = \int_X \overline{k(x,y)}\, g(x)\, dx$$

3.) $F = L_2(X)$, $G = \mathbb{C}^m$, $Af = \begin{pmatrix} (f,u_1) \\ \vdots \\ (f,u_m) \end{pmatrix}$ mit $u_k \in L_2(X)$ $(k = 1,\dots,m)$

Bildvektor Probefunktion

Adjungierte: • $g \in \mathbb{C}^m = G$, $f, u_k \in L_2(X)$

$$(Af, g) = \sum_{k=1}^{m} (Af)_k \bar{g}_k = \sum_{k=1}^{m} (f, u_k)\bar{g}_k = \sum_{k=1}^{m} (f, g_k u_k)$$
$$= \left(f, \sum_{k=1}^{m} g_k u_k\right) \stackrel{!}{=} (f, A^* g)$$

$$\Rightarrow A^* g = \sum_{k=1}^{m} g_k u_k \quad (\in L_2(X))$$

4.) Radon-Transf. $R : L_2(|x| < 1) \to L_2(S^1 \times [-1,+1])$

Adjungierte: ~~[illegible]~~

$$\int Rf(\theta,s)\, g(\theta,s)\, ds = \iint f(\underbrace{s\theta + t\theta^\perp}_{x})\, dt\, g(\theta,s)\, ds$$

$x \leftarrow$ entspricht wieder einer Drehung der Koordinaten

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, g(\theta, x\cdot\theta)\, dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{S^1}\int_{\mathbb{R}^1} Rf(\theta,s)\, g(\theta,s)\, ds\, d\theta}_{(Rf,g)} = \int_{S^1}\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, g(\theta, x\cdot\theta)\, dx\, d\theta$$

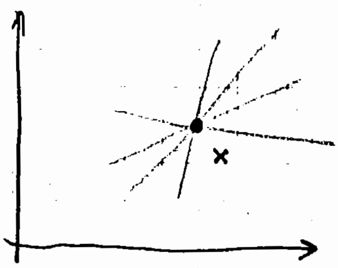
$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \int_{S^1} g(\theta, x\cdot\theta)\, d\theta\, dx \stackrel{!}{=} (f, R^* g)$$

laufen alle durch $x$, da ja $G := \{x \mid x\cdot\theta = s \stackrel{\text{def.}}{=} x\cdot\theta\}$?

$$\Rightarrow \underline{(R^* g)(x)} = \int_{S^1} g(\theta, x\cdot\theta)\, d\theta$$

heißt "Rückprojektion"

$g(\theta, s)$ : Gerade $x\theta = s$




Rückprojektion
nimmt alle Geraden durch den
Punkt x und mittelt diese.

SVD von $A$ :

$A : F \to G$ , $f_k$ ON-System im $F$

$g_k$ ON-System in $G$

$\sigma_k > 0$ heißen Singulärwerte

$$\left|\begin{aligned} Af &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (f, f_k) \cdot g_k \\ A^* g &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (g, g_k) f_k \end{aligned}\right\} \text{heißt Singulärwertzerlegung von } A \text{ (vgl. [NAT], S. [illegible])}$$

(10.01.91)

$$A f_k = \sigma_k g_k \quad , \quad A^* g_k = \sigma_k f_k$$

$$\left.\begin{aligned} \overbrace{A^*A}^{\text{operiert in } F!} f &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (f, f_k) A^* g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 (f, f_k) f_k \\ \underbrace{AA^*}_{\text{operiert in } G!} g &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (g, g_k) A f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 (g, g_k) g_k \end{aligned}\right\} \text{vgl. [NAT] S. [illegible]}$$

$\Rightarrow$ $f_k$ Eigenelemente zum EW $\sigma_k^2$ von $A^*A$
$g_k$ Eigenelemente ... $\sigma_k^2$ von $AA^*$

**Beispiele** **1.)** $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ , Rang $(A)$ maximal $= r = \overset{\text{Min}}{\cancel{\max}} (n, m)$

$\underbrace{(A^*A)^* = A^{(*)}\overset{\frown}{A}}_{\text{s.a.?}}$ hat $r$ positive EWe $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$

$A^*A f_k = \sigma_k^2 f_k \quad , \quad \|f_k\| = 1$

$AA^*A f_k = \sigma_k^2 A f_k \quad ; \quad g_k = \frac{1}{\sigma_k} A f_k$

$$\|g_k\|^2 = (g_k, g_k) = \frac{1}{\sigma_k^2} (Af_k, Af_k) = \frac{1}{\sigma_k^2} (A^*Af_k, f_k) =$$

$$= (f_k, f_k) = 1 .$$

da ja nur ONS, und kein VONS !

$$f = \sum_{k=1}^{r} (f, f_k) f_k + f^0 \quad , \quad Af^0 = 0$$ (da Rang(A) = r ?)

und $Af_k \neq 0$ vorausgesetzt, $k = 1, \dots, r$

$$Af = \sum_k (f, f_k) Af_k = \sum_k \overbrace{\sigma_k}^{} (f, f_k) g_k$$

Matrizenschreibweise:

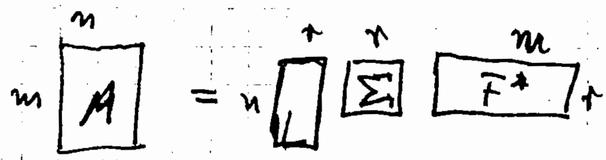
$$F = (f_1, \dots, f_r) \quad , \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix} \quad , \quad G = (g_1, \dots, g_r)$$

$$Af = G \cdot \Sigma \cdot F^* f \quad \Rightarrow \quad A = G \cdot \Sigma \cdot F^*$$

$$F^* f = \begin{pmatrix} f_1^* \\ \vdots \\ f_r^* \end{pmatrix} f$$ ← $f_1^* = \bar{f}_1^T$

Ebenso: $A^* = F \cdot \Sigma \cdot G^*$

$G, F$ orthogonal, $\Sigma$: Diagonalmatrix mit positiven Elementen.



**2.)** $A : F \to \mathbb{C}^m \quad , \quad Af = \begin{pmatrix} (f, u_1) \\ \vdots \\ (f, u_m) \end{pmatrix} \quad , \quad u_k \in F$

$$A^* h = \sum_{k=1}^{m} h_k u_k$$

$$AA^* : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m \quad , \quad (AA^*h)_\ell = \sum_{k=1}^{m} h_k (u_\ell, u_k) \, ,$$

d.h.: $AA^* = \left( (u_\ell, u_k) \right)_{\ell,k = 1,\dots,m}$

"Gram'sche Matrix", Normalmatrix.
positiv definit

$$AA^* g_k = \sigma_k^2 g_k \quad , k = 1,\dots,m \quad , \quad \|g_k\| = 1$$

$$f_k = \frac{1}{\sigma_k} A^* g_k = \frac{1}{\sigma_k} \sum_{\ell=1}^{m} \underset{\substack{\uparrow \\ (g_k)_\ell}}{g_{k\ell}} u_\ell$$

□

**Nun: Lösung von $Af = g$ durch SVD:**

Da stetige Inverse (möglicherweise) nicht existiert!

**Def:** Verallgemeinerte Lösung: $f^+$: also das $f^+$ mit kleinster Abweichung!

(i) $\|Af^{+} - g\| \leq \|Af - g\| \quad , \forall f$

(ii) Suche unter allen $f^+$ mit (i) dasjenige kleinster Norm! (→ Eindeutigkeit ?)

$$\Rightarrow f^+ = A^+ g \quad , \quad \underline{A^+} \text{ "verallgemeinerte Inverse" ("Moore-Penrose")}$$

Suche also statt Lsg. die "Verallg. Lsg"! (Exakte Lsg exist. evtl. gar nicht!)

**Satz 1.1.:** $A$ besitze eine SVD. Dann gilt:

(vgl. [NAT], S.87)

$$A^+ g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} (g, g_k) f_k$$

(oder in Matrizenschreibweise: $A^+ = F \cdot \Sigma^{-1} \cdot G^*$ )

**Beweis:** Sei $f \in F \Rightarrow f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, f_k) \underbrace{f_k}_{\text{zu pos. EW'e}} + \underbrace{f^0}_{\text{EW } 0} , \quad Af^0 = 0.$

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (f, f_k) g_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, A^* g_k) g_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (Af, g_k)\, g_k$$

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} (g, g_k)\, g_k + g^0 \quad , \quad A^* g^0 = 0$$

$$\Rightarrow \|Af - g\|^2 = \sum_k |\underbrace{(Af, g_k)}_{(f, f_k)\sigma_k} - (g, g_k)|^2 + \|g^0\|^2 ,$$

ist minimal, falls $(f, f_k) = \frac{(g, g_k)}{\sigma_k}$

also: (i) $\Leftrightarrow$ $(f, f_k) = \frac{(g, g_k)}{\sigma_k}$ . Suche nun unter diesen NB das $f$ mit kleinster Norm $\Rightarrow$ (ii)

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, f_k)^2| + \|f^0\|^2$$

ist minimal $\Leftrightarrow$ $f^0 = 0$

d.h. wenn $f^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(g, g_k)}{\sigma_k}}_{= (f, f_k) \text{ nach NB}} f_k = A^+ g$ ! $\square$

Also: Damit ist ein Ersatz für die (nicht vorhandene) Inverse gefunden

Slem: $Af = g$ , $g_\delta$ bekannt mit $\|g - g_\delta\| \le \delta$ ] aber: Stetig ?

$$\leadsto \|A^+ g_\delta - A^+ g\|^2 = \sum_k \left| \frac{(g - g_\delta, g_k)}{\sigma_k} \right|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^2}{\sigma_k^2}$$

i.allg. riesengroß! ($\infty$)

für schlecht gestellte Probleme

($\sigma_k \to 0$ für $k \to \infty$ !)

(d.h. $\sigma_k$ werden sehr schnell kleiner, je schlechter das Problem gestellt !?)

Deshalb:

Abgeschnittene SVD : $\underline{A^+_\omega g} = \sum_{\substack{k \\ \sigma_k \ge \omega\ !}} \frac{(g, g_k)}{\sigma_k} f_k$

d.h.: Man schnippelt in der SWZerlegungs-Darstellung von $A^+$ die Gleichen mit den kleinen SWen einfach ab !

Dann gilt:

**Satz 1.2.:** Sei $\|g - g_\delta\| \leq \delta$. Dann gilt:

$$\|A^+_\omega g_\delta - A^+ g\| \leq \Big(\sum_{\sigma_k < \omega} (f, f_k)^2\Big)^{1/2} + \delta \Big(\sum_{\sigma_k \geq \omega} \frac{1}{\sigma_k^2}\Big)^{1/2},$$

$(Af = g)$

**Beweis:** $\|A^+ g - A^+_\omega g_\delta\| \leq \|(A^+ - A^+_\omega) g\| + \|A^+_\omega (g - g_\delta)\|$

$$\leq \Big\| \sum_{\substack{k \\ \sigma_k < \omega}} \frac{(g, g_k)}{\sigma_k} f_k \Big\| + \Big\| \sum_{\sigma_k \geq \omega} \frac{(g - g_\delta, g_k)}{\sigma_k} f_k \Big\|$$

$$= \underbrace{\Big\| \sum_{\sigma_k < \omega} (f, f_k) f_k \Big\|}_{\left(\sum_{\sigma_k < \omega} |(f, f_k)|^2\right)^{1/2}} + \Big(\sum_{\sigma_k \geq \omega} \frac{\delta^2}{\sigma_k^2}\Big)^{1/2}$$

**Bemerkungen:**

1.) $\Big(\sum_{\sigma_k < \omega} |(f, f_k)|^2\Big)^{1/2}$ gibt an, wie genau $f$ durch $f_k$ mit $\sigma_k \geq \omega$ dargestellt werden kann.

2.) $\delta \Big(\sum_{\sigma_k \geq \omega} \frac{1}{\sigma_k^2}\Big)^{1/2} \sim \frac{1\delta}{\omega}$ ist ein Verstärkungsfaktor für Datenfehler.
(d.h.: $\sigma_k$ klein $\Rightarrow$ große Fehlerverstärkung (schlecht)
(bzw. $\omega$ klein)

3.) $\mathcal{F} = L_2(X)$:

$$\underline{\underline{A^+_\omega g}} = \sum_{\sigma_k \geq \omega} (f, f_k) f_k = \sum_{\sigma_k \geq \omega} \Big(f, \frac{1}{\sigma_k} A^* g_k\Big) f_k =$$

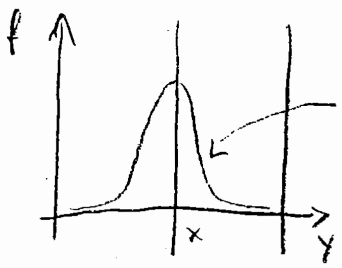
$$= \sum_{\sigma_k \geq \omega} \frac{(\overset{=g}{Af}, g_k)}{\sigma_k} f_k = \sum_{\sigma_k \geq \omega} \int_X f \bar{f}_k \, dx \; f_k$$

$$\underline{(A_\omega^+ g)(y)} = \sum_{\sigma_k \geq \omega} \int_X f \bar{f}_k \, dx \, f_k(y) =$$

$$= \int_X f(x) \underbrace{\sum_{\sigma_k \geq \omega} f_k(y) \bar{f}_k(x)}_{=: \delta_\omega(y,x)} dx = \underline{\int_X f(x)\, \delta_\omega(y,x)\, dx}$$

$\delta_\omega$ : "Point spread function"

$= A_\omega^+ g$, falls $f = \delta$




Beispiele: 1.) $\int_{-3}^{3} f(x)\, e^{-(x-y_j)^2}\, dy = g(y_j)$ , $j = 1,\dots,m$

$A : L_2(-3,+3) \longrightarrow \mathbb{C}^m$

$\hat{=}$ Bsp. 2 mit $u_j(x) = e^{-(x-y_j)^2}$

( Num. Bildv. 13.01.91 )

$$Af = \sum_k \sigma_k (f, f_k)\, g_k$$

$$Af = g \;, \quad A_\omega^+ g = \sum_{\sigma_k \geq \omega} \frac{(g, g_k)}{\sigma_k} f_k$$

<u>Beispiel:</u> $Af = \begin{pmatrix} (f, u_1) \\ \vdots \\ (f, u_m) \end{pmatrix}$ , $A : F \to \mathbb{C}^m$ , $F = L_2(X)$

<u>Bsp. a.)</u> $\int_{-3}^{3} e^{-(x-y)^2} f(y)\, dy = g(x)$ , $y = y_j$ , $j = 1, \dots, m$

$$u_j(x) = e^{-(x-y_j)^2} \;, \quad X = (-3, 3)$$

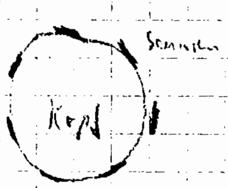
$((u_j, u_k))$ Gram'sche Matrix , Normalmatrix

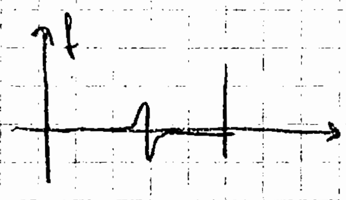
$$A_\omega^+ g = \int_{-3}^{+3} f(y) \underbrace{\delta_\omega (x-y)}_{\text{PSF}}\, dy$$

b.) $\int_0^1 \frac{f(x)}{|x-y|}\, dx = g(y)$ , $y = y_j$ , $j = 1, \dots, m$ , $m = 10$

$y_j > 1$ .

z.B. Biomagnetik




Mehrere Beispiele vorgeführt (algebr. SVD)

(Wichtig!)

(Singulärwerte $\underbrace{\text{klein: schlecht}}_{\text{breite p.s.f.}}$ , $\underbrace{\text{groß: gut}}_{\text{schmaler Peak spreizt f}}$

Praktische Lösung: <u>Tychonoff - Phillips - Methode</u> (vgl. [NAT] S. 88)

$\underline{f_\omega}$ : $\underset{f}{\mathrm{Min}} \{ \underbrace{\| Af - g \|^2}_{\text{wie bei verallg. Inverse}} + \omega^2 \|f\|^2 \}$ Idee! (Anwendung: S. 152 ?)

<u>Satz 1.3.:</u> <u>A besitze eine SVD</u>. Dann gilt:

$$\underbrace{f_\omega}_{\text{Tych.-Phill.-Lsg.}} = \sum_k \frac{1}{\sigma_k} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\sigma_k^2}} (g, g_k) f_k$$

(vgl. Satz 1.1.!)
identisch zu SVD bis auf Faktor $\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\sigma_k^2}}$ !

<u>Bemerkung:</u> $\sigma_k \gg \omega$ : $\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\sigma_k^2}} \approx 1$

$\sigma_k \ll \omega$ : $\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\sigma_k^2}} \ll 1$

d.h.: Effekt ähnlich wie bei abgeschn. SVD
(große $\sigma$-Werte bleiben stehen, kleine bekommen Faktor)

<u>Beweis des Satzes:</u> $Af = \sum_k \sigma_k (f, f_k) g_k$

$f = \sum_k (f, f_k) f_k + f^0$ , $Af^0 = 0$ (bzw. $f^0 \perp f_k$)

da nicht VONS, sondern nur ONS vorausgesetzt! (→ analog letzte SVD.!)

$g = \sum_k (g, g_k) g_k + g^0$ , $A^* g^0 = 0$ , $g^0 \perp g_k$

$$\| Af - g \|^2 + \omega^2 \|f\|^2 = \| \sum_k (\sigma_k (f, f_k) - (g, g_k)) g_k - g^0 \|^2$$
$$+ \omega^2 \| \sum_k (f, f_k) f_k + f^0 \|^2$$

$$= \sum_k |\sigma_k (f, f_k) - (g, g_k)|^2 + \|g^0\|^2 + \omega^2 \Big( \sum_k |(f, f_k)|^2 + \|f^0\|^2 \Big)$$

Nun: Lemma aus II : (Wiener Filter) : (II.5) :

$$F(w) = |z-w|^2 + \omega^2 |w|^2 \quad , w \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$$

ist minimal für $w = \frac{1}{1+\omega^2} z$ ↖ {vgl. S. 108 Lemma!}

Sei hier: $w = (f, f_k)$. Wende an auf: $(\forall k)$

$$|\sigma_k w - (g, g_k)|^2 + \omega^2 |w|^2$$

$$|w - \underbrace{\frac{(g,g_k)}{\sigma_k}}_{z}|^2 + \frac{\omega^2}{\sigma_k^2}|w|^2 \quad \overset{\text{Minimum bei}}{\Rightarrow} \quad w = \frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\sigma_k^2}} \cdot z \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} (f, f_k) &= \frac{1}{\sigma_k} \frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\sigma_k^2}} (g, g_k) \\ f^0 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ ist Lösung der Minimierungsaufgabe}$$

$$f_\omega = \sum_k (f, f_k) f_k = \sum_k \frac{1}{\sigma_k} \frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\sigma_k^2}} (g, g_k) f_k \qquad \square$$

Satz 1.4.: A besitze eine SVD. Dann ist $f_\omega$ Lösung von

$$(A^*A + \omega^2 I) f_\omega = A^* g$$

("regularisierte Normalgleichungen")

(vgl. Numerik I: Normalgleichungen!)

$\Rightarrow f_\omega = (A^*A + \omega^2 I)^{-1} A^* g$

wenn man SVD nicht kennt: Lösungsmöglichkeit! Glgssystem zu lösen!

→ „Direkte Algebraische Methode"! vgl. S. 150!

Beweis: $(A^*A + \omega^2 I) f_k = (\sigma_k^2 + \omega^2) f_k$

Schreibe $f_\omega$ und Satz 1.3.:

$$(A^*A + \omega^2 I) f_\omega = (A^*A + \omega^2 I) \left\{ \sum_k \frac{1}{\sigma_k} \frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\sigma_k^2}} (g, g_k) f_k \right\}$$

$$= \sum_k \frac{1}{\sigma_k} \underbrace{\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\sigma_k^2}}}_{= \frac{\sigma_k^2}{\omega^2+\sigma_k^2}} (g, g_k)(\sigma_k^2 + \omega^2) f_k =$$

$$= \sum_k \sigma_k (g, g_k) f_k = A^* g \qquad \square$$

( d.h.: Das Tychonov-Phillips zur nach d.v. Glgs.system zu lösen, aber: Normalglg. sind aufzustellen ! ) !

<u>Satz 1.5.</u>: Für $A : L_2(X) \to \mathbb{C}^m$, $Af = \begin{pmatrix} (f, u_1) \\ \vdots \\ (f, u_m) \end{pmatrix}$ ← vgl. Bsp. 3), S. 124 !

$$\Rightarrow f_\omega(y) = \int_X f(x) \underbrace{\delta_\omega(x-y)}\, dx$$

neue PSF ! (nicht abgesehen SVD !)
← eben die des Tychonov-Phillips-Methode für dieses Bsp. !

<u>Beweis</u>: ( hier nicht. )

(17.01.91) Eine <u>weitere Methode zur Regularisierung</u> bieten Iterationsverfahren. Der Regularisierungsparameter ist hier die Anzahl der Iterationsschritte, die zu optimieren ist.

## Iterative Lösungen von $Af = g$

<u>Landweber</u>: $f^{t+1} = f^t - \gamma A^*(Af^t - g)$

A besitze eine SVD : $Af = \sum_k \sigma_k (f, f_k) g_k$,

$$A^* g = \sum_k \sigma_k (g, g_k) f_k$$

$$f^0 = 0, \quad f^t \overset{\text{Ansatz}}{=} \sum_k c_k^t f_k$$

$c_k^t$ noch zu bestimmen! (s.u.)

$$\rightsquigarrow Af^t = \sum_k \sigma_k c_k^t g_k ,$$

$$A^*(Af^t - g) = \sum_k \left( \sigma_k^2 c_k^t f_k - \sigma_k (g, g_k) f_k \right) =$$

$$= \sum_k \left( \sigma_k^2 c_k^t - \sigma_k (g, g_k) \right) f_k$$

$$f^{t+1} = \sum_k \left( c_k^t - \gamma \left( \sigma_k^2 c_k^t - \sigma_k (g, g_k) \right) \right) f_k$$

$$= \sum_k c_k^{t+1} f_k$$

$$\Rightarrow \quad c_k^{t+1} = c_k^t \,(1-\gamma\sigma_k^2) + \sigma_k \gamma \,(g, g_k) \quad , \quad c_k^0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{c_k^t}} = \underbrace{(1+q+\dots+q^{t-1})}_{\frac{1-q^t}{1-q}} \,\sigma_k\, \gamma\, (g, g_k) \quad , \quad q = 1-\gamma\sigma_k^2$$

$$\frac{1-q^t}{1-q} = \frac{1-(1-\gamma\sigma_k^2)^t}{\gamma\sigma_k^2}$$

$$= \underline{\underline{\left(1-(1-\gamma\sigma_k^2)^t\right) \frac{(g, g_k)}{\sigma_k}}}$$

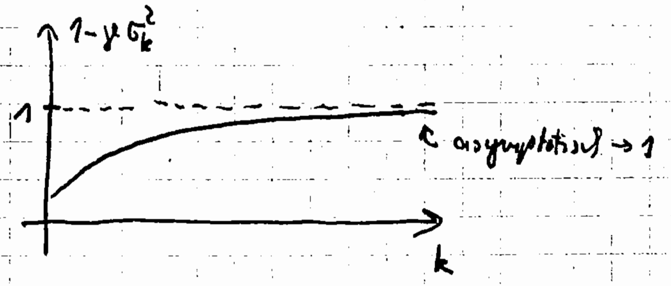
$$\Rightarrow \underline{\text{Satz 1.5:}} \overset{A\text{ SVD }\Rightarrow}{} \quad \underline{\underline{f^t = \sum_k c_k^{t} f_k = \sum_k \overbrace{\left(1-(1-\gamma\sigma_k^2)^t\right)}^{\text{neues } F_\gamma!} \frac{(g, g_k)}{\sigma_k} f_k}}$$

Index!

<u>Folgerung:</u> Falls $|1-\gamma\sigma_k^2| < 1 \;\; \forall k$, dann folgt: $f^t \to A^+ g$.

$$\left( \Leftrightarrow \quad \gamma < \frac{2}{\sigma_1^2} \, , \; \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \right)$$

Sei also $\gamma < \frac{1}{\sigma_1^2}$:




$\Rightarrow \quad (1-\gamma\sigma_k^2)^t \longrightarrow 0$ „schnell" für kleine $k$

„langsam" für große $k$ (d.h. für kleine Singulärwerte!)

$\Rightarrow$ <u>Man darf nicht zu lange iterieren!</u> ($\to$ rechtzeitig abbrechen!)

da dann die Beiträge der kleinen SWen dazu kommen!

<u>Hier</u> steckt der Regularisierungsparameter!

<u>Nun:</u> Lösung von $Af = g$ bezüglich Ungleichungen (z.B. $0 \leq f$):

dazu ist zu tun: $\min\limits_{f \geq 0} \|Af - g\|$ <u>(laut Literatur!)</u>

Aber:

<u>Beispiel:</u> $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\text{Rang}(A) = 2$.

Exakte Lösung von $Af = g$: $f_e \geq 0$ (komponentenweise)

$f_e$ e für exakt!

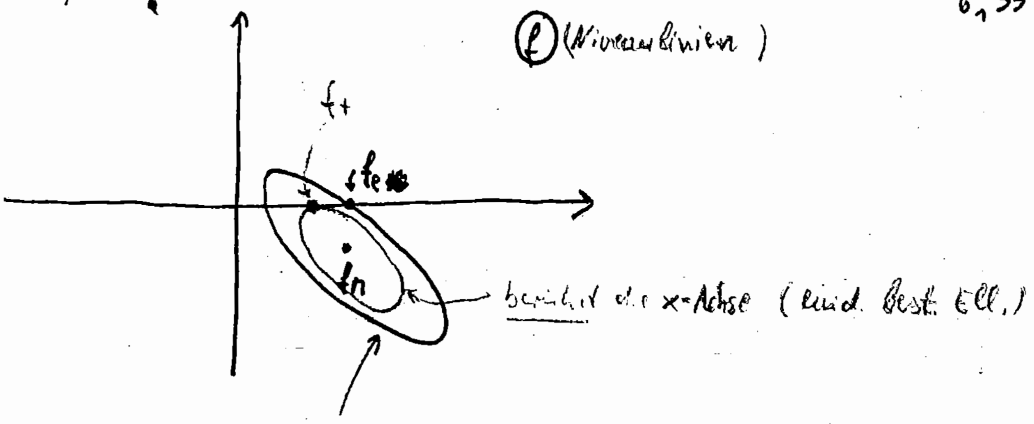
$f_M$: $\min\limits_{f \in \mathbb{R}^2} \|Af - g\|$, $\|g - g_0\| = \delta$,

$$f_+ : \min_{f \geq 0} \|Af - g\|$$

Vermutung: $f_+$ ist wegen der Problemstellung das bessere Ergebnis.
<u>falsch gedacht!</u> :

$\|Af - g\| = \delta$ ← (Ellipse, Mittelpunkt $f_M$, Halbachsen der Länge $\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}$ in
$\underset{\text{Matrix der Ellipse}}{A^*A}\, f_i = \sigma_i^2 f_i$ , $i = 1,2$ ] Richtung $f_1, f_2$ )

$\sigma_1 \gg \sigma_2$




$\sigma_1 \gg \sigma_2$, d.h. sehr unterschiedliche Halbachsen
(untertrieben gezeichnet?)

⇒ <u>liefert Gegenbeispiel</u> : $f_+$ ist schlechter als $f_M$ !

Nun Anwendung der obigen (Regularisierungs-)Verfahren auf die Radon-Transf. 

## §2 Die Radon-Transformation in $\mathbb{R}^n$

$n = 2,3$ $\qquad R: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(Z)$, $Z = S^{n-1} \times \mathbb{R}$

**Def:** $$(Rf)(\theta, s) = \int_{x\cdot\theta = s} f(x)\,dx \quad , \quad \theta \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$$

**Satz 2.1.** (Projektionssatz): Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\underbrace{\hat{f}(\sigma\theta)}_{n\text{-dim FT}} = (2\pi)^{(n-1)/2} \underbrace{(Rf)^\wedge(\theta,\sigma)}_{1\text{-dim FT bzgl. } s\text{, d.h. bzgl. 2. Arg.}} = (2\pi)^{\frac{(n-1)}{2}} (R_\theta f)^\wedge(\sigma) \quad !$$

**Beweis:** wie in Übungen

**Satz 2.2.:** $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\underbrace{R(f*g)}_{n\text{-dim Faltung}} = \underbrace{Rf * Rg}_{1\text{-dim Faltung bzgl. } s} .$$

$Rf(\theta,s) * Rg(\theta,s)$

Faltung immer bzgl. 2. Var.

**Beweis:** $R(f*g)(\theta,s) =$

altern. Def: $(Rf)(\theta,s) = \int_{y\in\theta^\perp} f(s\theta + y)\,dy$, $\quad \theta^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x\cdot\theta = 0\}$

$$\Rightarrow \text{hier} \quad = \int_{\theta^\perp} (f*g)(s\theta + y)\,dy = \int_{\theta^\perp}\int_{\mathbb{R}^n} f(s\theta + y - z) g(z)\,dz\,dy$$

setze $z = t\theta + y'$ mit $y' \in \theta^\perp$

$$= \int_{\theta^\perp}\int_{\theta^\perp}\int_{\mathbb{R}^1} f((s-t)\theta + y - y')\, g(t\theta + y')\,dt\,dy'\,dy$$

$$= \int_{\theta^\perp}\int_{\mathbb{R}^1} Rf(\theta, s-t)\, g(t\theta + y')\,dy'\,dt = \text{(b.w.)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} (Rf)(\theta, s-t)\, Rg(\theta,t)\, dt = \big((Rf) * (Rg)\big)(\theta, s) \qquad \blacksquare$$

$$(R^* g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\underbrace{\theta, x\cdot\theta}_{\widehat{=}\ \text{Hyperebene}})\, d\theta$$

$\widehat{=}$ Mittelwert über alle Hyperebenen durch den Punkt $x$ (vgl. S. 13 im f. Vorl.!) od. S. 9?

$g \in \mathcal{S}(Z)$, $\underline{Z} = \underbrace{S^{n-1}}_{\subset \mathbb{R}^n!} \times \mathbb{R}^1$ = Einheitszylinder in $\mathbb{R}^n$

$\underline{\mathcal{S}(Z)} := \{ g \in C^\infty(Z),\ s^\alpha D^\beta g \text{ beschränkt } \forall\, \alpha, \beta \}$

Merksatz: also „erst Rückproj., dann Faltung" ist das Gleiche, wie „erst falten, dann Rückproj."

**Satz 2.3.:** $\underline{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ g \in \mathcal{S}(Z)}$. Dann:

$$! \ \underline{(R^* g) * f = R^*(g * Rf)}\ ! \ .$$

Wichtig!

(⇝ Anwendung später: gefilterte Rückprojektion, vgl. § 3!)

**Beweis:** $(R^* g) * f\, (x) = \int_{\mathbb{R}^n} R^* g(x-y) f(y)\, dy =$

muß man so lesen

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} g(\theta, (x-y)\cdot\theta)\, d\theta\, f(y)\, dy$$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\theta, (x-y)\cdot\theta)\, f(y)\, dy\, d\theta$$

setze $y = s\theta + y'$, $y' \in \theta^\perp$ $\Rightarrow$ $y\cdot\theta = s$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} \int_{\mathbb{R}^1} g(\theta, x\cdot\theta - s)\, f(s\theta + y')\, ds\, dy'\, d\theta$$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^1} g(\theta, \underbrace{x\cdot\theta}_{t} - s)\, Rf(\theta, s)\, ds\, d\theta$$

$$= \int_{S^{n-1}} (g * Rf)(\theta, x\cdot\theta)\, d\theta = R^*(g * Rf) \qquad \square$$

**Anwendung:** Auf die Lösung von $Rf = g$ :

$$R^*(\underbrace{h * Rf}_{\text{Filtern mit } h}) = R^* h * f$$

Rückproj.

wähle $h$ so, daß $R^* h \sim \delta$

$\delta$-Fn.

("gefilterte Rückprojektion") (vgl. §3?) (S.137)

(21.01.91)

**Hilbert - Transformation:** $H : \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$?

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1), \quad (Hf)(x) := \frac{1}{\pi} \oint_{\mathbb{R}^1} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

Alles 1-dim!

(siehe Aufgabe 1 ! $\oint$: Hauptwert)

**Satz 2.4.:** $(Hf)^\wedge(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi)\, \hat{f}(\xi)$ ← in $\mathbb{R}^1$!

**Beweis:** Sei $Tf = \oint \frac{f(x)}{x}\, dx$ wie in Aufgabe 1.

(vgl. SNATS, Anhang!) Dann ist $T \in \mathcal{S}'$.

$\frac{1}{\pi} T * f = Hf$ (nach Def. der Faltung)

Nach Satz 2.3.: $(T * f)^\wedge = (2\pi)^{1/2}\, \hat{T} \hat{f}$.

Nach Aufgabe 1: $\hat{T}(\xi) = -i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \operatorname{sgn}(\xi)$

$$\Rightarrow (Hf)^\wedge(\xi) = \frac{1}{\pi}(2\pi)^{1/2}\, \hat{T} \hat{f}(\xi)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (-i) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \operatorname{sgn}(\xi)\, \hat{f}(\xi) \quad (\checkmark) \quad \blacksquare$$

**Folgerung:** $(H^k f)^\wedge(\xi) = \left(-i \operatorname{sgn}(\xi)\right)^k \hat{f}(\xi)$

$\Rightarrow$ $k$ gerade: $H^k = (-i)^k \, Id = \left((-i)^2\right)^{k/2} Id = (-1)^{k/2}\, I$

$k$ ungerade: $[(-i) \operatorname{sign}(\xi)]^k = (-i)^{k-1}(-i) \operatorname{sgn}(\xi)$

$$= (-1)^{\frac{k-1}{2}} (-i) \operatorname{sgn}(\xi)$$

$$\Rightarrow H^k = (-1)^{\frac{k-1}{2}} H$$

**Satz 2.5.:** (Radon'sche Inversionsformel, 1917):

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g = Rf$. Dann gilt:

bzgl. $(\theta, t)$ bzgl. $t$, $\theta$ bzgl.

$$f = \begin{cases} \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}(-1)^{\frac{n-2}{2}} R^* H g^{(n-1)} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}(-1)^{\frac{n-1}{2}} R^* g^{(n-1)} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit $g = g(\theta, s)$, $\underline{g^{(n-1)}} = \dfrac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} g(\theta, s)$, also Ableitung bzgl. $s$.

bzgl. $t$! $\theta$ bzgl.!

$$\underline{Hg^{(n-1)}(\theta, t)} = \frac{1}{\pi} \oint \frac{g^{(n-1)}(\theta, s)}{t-s}\, ds \, .$$

**Beweis:** $f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi$

(Polarkoord.: $\xi = \sigma\theta$, $\sigma \geq 0$, $\theta \in S^{n-1}$)

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \sigma^{n-1} e^{i\sigma x\cdot\theta} \hat{f}(\sigma\theta)\, d\theta\, d\sigma$$

$$\left( \hat{f}(\sigma\theta) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} (Rf)^\wedge(\theta, \sigma) \right)$$

$$= (2\pi)^{-n+1/2} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \sigma^{n-1} e^{i\sigma x\cdot\theta} \hat{g}(\theta, \sigma)\, d\theta\, d\sigma$$

$$\overset{(2.7)}{=} \frac{1}{2}(2\pi)^{-n+1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S^{n-1}} |\sigma|^{n-1} e^{i\sigma x\cdot\theta} \hat{g}(\theta, \sigma)\, d\theta\, d\sigma$$

(aus Symmetriegründen!)

$$= \frac{1}{2}(2\pi)^{-n+1/2} \int_{S^{n-1}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^{n-1} e^{i\sigma x\cdot\theta} \hat{g}(\theta, \sigma)\, d\sigma}_{=:\,(I^{1-n} g)(x\cdot\theta)}\, d\theta$$

wobei $I^{1-n}$ "Bessel-Potential" genannt wird

$$(I^{1-n} g)(s) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^{n-1} e^{i\sigma s} \hat{g}(\theta, \sigma)\, d\sigma \cdot (2\pi)^{1/2} \Rightarrow \text{(b.w.)}$$

$$\Rightarrow \quad (I^{1-n} g)^\wedge(\sigma) = (2\pi)^{1/2} |\sigma|^{n-1} \hat{g}(\theta,\sigma) = (2\pi)^{1/2} (\operatorname{sgn}\sigma)^{n-1} \sigma^{n-1} \hat{g}(\theta,\sigma)$$

Nach I.1. Beispiel a.): $\sigma^{n-1}\hat{g}(\theta,\sigma) = i^{1-n}(g^{(n-1)})^\wedge(\theta,\sigma)$

$$\Rightarrow \quad (I^{1-n}g)^\wedge(\sigma) = (2\pi)^{1/2}\underbrace{i^{1-n}(\operatorname{sgn}\sigma)^{n-1}}_{(-i\operatorname{sgn}\sigma)^{n-1}}(g^{(n-1)})^\wedge(\theta,\sigma)$$

$$= (2\pi)^{1/2}(H^{n-1}g^{(n-1)})^\wedge(\theta,\sigma)$$

$$\Rightarrow \quad I^{1-n}g = (2\pi)^{1/2}H^{n-1}g^{(n-1)}$$

In obige Gleichung eingesetzt:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-n+1}\int_{S^{n-1}} H^{n-1}g^{(n-1)}(\theta, x\cdot\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi)^{-n+1} R^*\left(H^{n-1}g^{(n-1)}\right)(x)$$

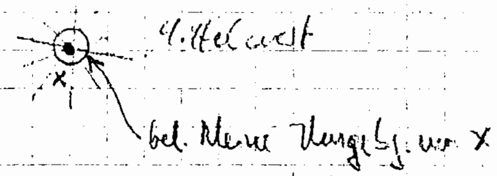
Mit der Folgerung aus Satz 2.4. zusammen folgt die Beh. □

Bemerkungen: n ungerade:

Ableitung sagt, ergibt sich nur lokale Kenntnis!

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-n+1}(-1)^{\frac{n-1}{2}} R^* g^{(n-1)}(x)$$

(n=3): Rückproj.:




Integral über $S^{n-1}$!

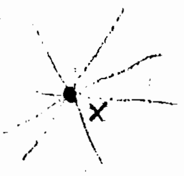
$R^*$ ist berechenbar, wenn g für alle Hyperebenen durch U(x) bekannt ist für eine beliebige Umgebung U(x) um x. (ganze Umgebg, da ja Differentiation!)

Man sagt: "Die Inversionsformel ist lokal".

$n$ gerade: $\quad f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-n+1}(-1)^{\frac{n-2}{2}} R^* H g^{(n-1)}(x)$

$R^* H g^{(n-1)}(x)$ verlangt! $\quad H g^{(n-1)}(\theta, x\cdot\theta)$

$$H g(\theta,s) = \frac{1}{\pi} \oint \frac{g(\theta,t)}{s-t}\, dt$$



Integration über ganz $\mathbb{R}$! ($t \in \mathbb{R}$!)

Hier reicht lokale Kenntnis von $g$ nicht aus
da $\oint$ über ganz $\mathbb{R}$!

Man sagt: **Inversionsformel nicht lokal!**

Also z.B. im 3-dim sehr viel einfacher als im 2-dim. !
($\Rightarrow$ z.B. mediz. Anwendungen ..)

Patient!

## §3 Die gefilterte Rückprojektion. (vgl. [Nat, S.102]!)

Problem: $f$, $g = Rf$
$g$ bekannt, $f$ gesucht.

Radon'sche Inversionsformel mathem. kompliziert $\Rightarrow$ nicht sehr gut

also:

**1. Möglichkeit:** Benutze Radon'sche Inversionsformel (Satz 2.5, s.o.!)

**2. Möglichkeit:** (liefert RAM-LAK-Verf.!) $\quad \underline{W_b * f = R^*(w_b * Rf)}$ $\quad$ (Faltung bzgl. 2. Var.!) $\quad \underline{(\text{falls } W_b = R^* w_b)}$

($\rightarrow$ Satz 2.3)!

denn dann stellt lediglich $\delta * f = f$

Ziel: $\underline{\text{wähle } \cancel{W_b}\ w_b \text{ so, daß } W_b \approx \delta\text{-Distr.}}$ ; $\underline{W_b(x) = W_b(|x|)}$ d.h. radiale Fn.
$\Rightarrow w_b(\theta,s) = w_b(s)$ !

Nach Aufg. 43: $\quad (R^* w_b)^\wedge(\xi) = 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} |\xi|^{1-n}\, \hat{w}_b(|\xi|)$ $\quad = w_b(-s)$ !

$$= \hat{W}_b(|\xi|)$$

d.h. $W_b$ einfach ~~aus~~ aus $w_b$ zu bestimmen:

a.) $\underline{\hat{W}_b(|\xi|) = (2\pi)^{-n}}$, d.h. $W_b = \delta$.

$\Rightarrow \quad \hat{w}_b(\sigma) = \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{(1-n)}{2}}\,\sigma^{n-1}$

$$\Rightarrow \quad \underline{w_b(s)} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{2}\,(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \underbrace{\int e^{is\sigma}\,\sigma^{n-1}\,d\sigma}_{\text{Dieses Integral exist. gar nicht!}}$$

wird gebraucht zur gefilterten Rückproj.!

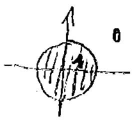
klar, da $w_b$ Distribution und keine Funktion!

$\Rightarrow$ Man verzichtet auf exakte $\delta$-Distr.!

b.) $\underline{\hat{W}_b(|\xi|) = (2\pi)^{-n/2}\,\phi\left(\frac{|\xi|}{b}\right)}$, $\phi$ Tiefpaß-Filter

d.h. für kleine Argumente $\approx 1$, sonst $\approx 0$

also: $\phi(\sigma) \sim \begin{cases} 1, & |\sigma| < 1 \\ 0, & |\sigma| > 1 \end{cases}$





z.B. idealer Tiefpaß: $\phi(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(allerdings wird sich zeigen: Sprung zu abrupt!)

$\Rightarrow \quad W_b(|x|) = (2\pi)^{-n/2}\, b^n\, \frac{J_{n/2}(b|x|)}{(b|x|)^{n/2}}$ ← Besselfkt.

statt $\delta$-Fu! (vgl. Sinc-Fu.!) Vgl. S.32!

ist $\approx \delta$-Fu!

$\Rightarrow \quad \hat{w}_b(\sigma) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1/2-n}\,|\sigma|^{n-1}\,\hat{\phi}\left(\frac{|\sigma|}{b}\right)$

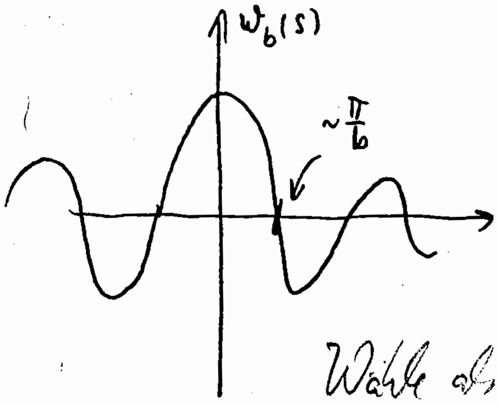
$$W_b(s) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-n} \underbrace{\int_{\cancel{-\infty}\,-b}^{\cancel{+\infty}\,+b} e^{is\sigma}\,|\sigma|^{n-1}\,\phi\left(\frac{|\sigma|}{b}\right)d\sigma}_{\text{dieses Integral macht Sinn!}}$$

Deshalb wurde ja gerade der Tiefpaß $\phi$ eingeschaltet! $\left\{\begin{array}{l}\text{nach Def.} \\ \text{von } \phi!\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Idealer Tiefpaß: $\underline{w_b(s)} = \frac{b^2}{4\pi^2}\,u(bs)$ } Ram-Lak-Filter!

mit $\underline{u(s)} = \begin{cases} \frac{\cos s - 1}{s^2} + \frac{\sin s}{s}, & s \neq 0 \\ \frac{1}{2} & s = 0 \end{cases}$

$W_b$: "RAM-LAK-Filter"




gefunden von: (2 Inder:)
Ramachandran -
Lakshminarayanan
(kurz: Ram-Lak)

Wähle also als Filter $w_b$ = Ram-Lak-Filter

$$= \frac{\cos s - 1}{s^2} - \frac{\sin s}{s}$$

(24.01.91)

$$g = Rf \,, \quad (Rf)(\theta, s) = \int_{x\cdot\theta} f(x)\,dx$$

$$\underline{W_b * f = R^* w_b * g} \,, \quad R^* w_b = W_b$$ } soll im Folgenden (diskretisiert) berechnet werden!

$$\hat W_b(\xi) = 2(2\pi)^{(n-1)/2} |\xi|^{1-n} \hat w_b(|\xi|)$$ , falls $\hat w_b$ richtungsunabh.

$$\hat w_b(\sigma) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1/2-n} |\sigma|^{n-1} \underline{\phi\left(\frac{\sigma}{b}\right)}$$ ← $\phi$ einbauen, damit Fu. und keine Distr. rauskommt! (s.o.)

$$\text{mit } \phi \approx \begin{cases} 1 & \text{für kleine } |\sigma| \\ 0 & \text{für } |\sigma| > b \end{cases}$$

## 1.) Diskretisierung der Faltung:

$\underline{-q \le l \le q}$

Nach Satz 1.5.5.:

mit: $L = h\mathbb{Z}$ , $\hat L = \frac{2\pi}{h}\mathbb{Z}$ :

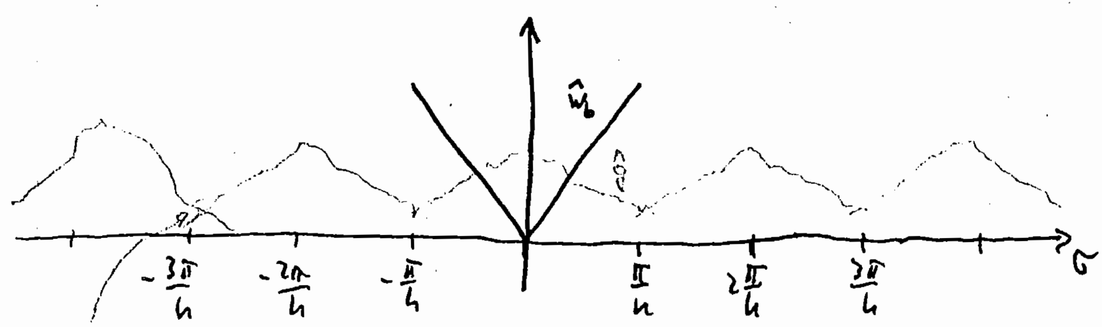
$$\Rightarrow \underline{(w_b \overset{h}{*} g)(s)} := \underline{h \sum_{l=-q}^{q} w_b(s - hl)\, g(hl)} \,.$$ ! Anwendung: S.149 oben

Es gilt: (s.o.)

$$\underline{(w_b \overset{h}{*} g - W_b * g)^\wedge(\sigma)}$$
$$= \underline{(2\pi)^{1/2}\, \hat w_b(\sigma) \sum_{l \ne 0} \hat g\left(\sigma - \frac{2\pi}{h} l\right)}$$

(n=2)

$\frac{\pi}{h} > b$ !




Überlappungen sollen klein sein ⇒

Also:

$\Rightarrow$ Falls $\hat{g}$ vernachlässigbar für $|\sigma| > \frac{\pi}{h}$ : $W_b \overset{h}{*} g \approx W_b * g$

d.h. diskrete Faltung ist gute Approxim. an kontin. Faltung

## 2.) Diskretisierung der Rückprojektion:

$$(R^* g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, x\cdot\theta)\, d\theta \underset{\text{Ziel!}}{\approx} \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j\, g(\theta_j, x\cdot\theta_j)$$

geeignet zu wählen!

$n=2$:

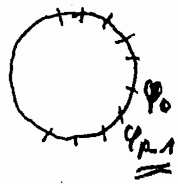
$$\underbrace{\int_{S^1} g(\theta, x\cdot\theta)\, d\theta}_{=:\ R_p^* g(x)} \approx \frac{2\pi}{p} \sum_{j=0}^{p-1} g(\theta_j, x\cdot\theta_j) \ !$$

← Anwendung: S.149 oben!

Trapezregel!

mit $\theta_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j \\ \sin\varphi_j \end{pmatrix}$, $\varphi_j = \frac{2\pi}{p} j$ ← Def. v. p!

$(j = 0, \dots, p-1)$




**Frage: Wo ist $R_p^*(W_b \overset{h}{*} \cdot)$ zuverlässig?:**

Nach Aufgabe 8:

im Folgenden: Ziel: Diese Summe soll klein werden!

$$R_p^* W_b \overset{h}{*} g(x) = R^*(W_b * g) + 2\pi \sum_{\ell \neq 0} C_{\ell p}(x)$$

$(\ell \cdot p)$

mit $C_\ell(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_b * g(\theta, x\cdot\theta)\, e^{-i\ell\varphi}\, d\varphi$, $\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

Es gilt:

$$C_\ell(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\ell\varphi} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(W_b * g)^\wedge(\theta, \sigma)}_{= \hat{W}_b \hat{g} \cdot (2\pi)^{1/2}} e^{i\sigma x\cdot\theta}\, d\sigma\, d\varphi$$

(als inverse FT der FTransformierten!)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\ell\varphi} \int_{-b}^{+b} \hat{W}_b(\sigma) \underbrace{\hat{g}(\theta, \sigma)}_{= (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\sigma\theta) \text{ nach Satz 1.1.}} e^{i\sigma x\cdot\theta}\, d\sigma\, d\varphi$$

da $\hat{W}_b$ außerhalb $\equiv 0$!

$$= (2\pi)^{-3/2} \int_0^{2\pi} e^{-i\ell\varphi} \int_{-b}^{+b} \hat{W}_b(\sigma) \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\, e^{-iy\cdot\sigma\theta}\, dy\; e^{i\sigma x\cdot\theta}\, d\sigma\, d\varphi$$

$$= (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^2} f(y) \int_{-b}^{+b} \hat{W}_b(\sigma) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-i\ell\varphi + i\sigma\theta\cdot(x-y)}\, d\varphi}\, d\sigma\, dy$$

Schreibe $x - y = |x-y| \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$, $\psi = \psi(x,y)$

Damit: (b.w.)

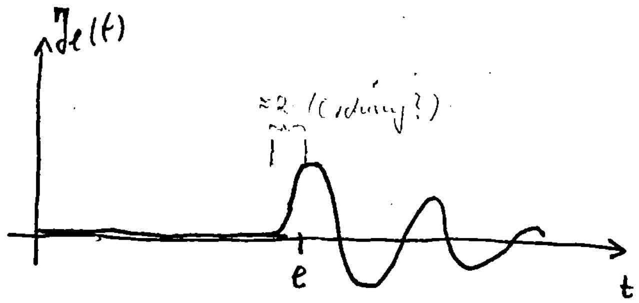
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \dots d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{-il\varphi + i\sigma|x-y|\cos(\varphi-\psi)}\, d\varphi$$

(Setze $\varphi - \psi = \varphi'$ :) $$= e^{il\psi} \int_0^{2\pi} e^{-il\varphi' + i\sigma|x-y|\cos\varphi'}\, d\varphi'$$

(Teil I.4. der Vorl.)
$$= e^{il\psi}\, 2\pi\, J_l(\sigma|x-y|)(i)^{l},$$ $J_l$ Besselfunktion der Ordnung $l$.

$$\Rightarrow c_l(x) = (2\pi)^{-1/2} (i)^{-l} \int_{\mathbb{R}^2} f(y) \int_{-b}^{+b} \hat{W}_b(\sigma)\, J_l(\sigma|x-y|)\, d\sigma\, e^{il\psi}\, dy$$

wird nun untersucht !




Debye'sche Beziehung: $0<\vartheta<1$, $l \geq 0$

$$0 \leq J_l(\vartheta \cdot l) \leq (2\pi l)^{-1/2} (1-\vartheta)^{-1/4} \underbrace{e^{-\frac{l}{3}(1-\vartheta^2)^{3/2}}}_{\text{relevanter Term}}$$

Also: Unter folgenden Bedingungen ist $R_p^*(w_{b^*})$ zuverlässig:

Annahme: $f(x) = 0$ für $|x| \geq 1$ ← ①

Falls $2b \leq l$: $c_l(x)$ vernachlässigbar !

$$\Rightarrow R_p^* W_b * g \sim R^* W_b * g \text{ , falls } p \geq 2b$$ !

Filterung (Tiefpaß)

Rückproj.

Also: Voraus. an gefilterte Rückproj., damit diese zuverlässig ! ①, …, ④ !

diskr. Rückproj. (r.o.)

diskr. Faltung (r.o.)

Zusammenfassung: $$f_{FB} = \underset{RP}{R_p^*}\, \underset{F}{W_b^h} * g$$

ergibt damit Ursprungsproj.

③ ④ S.140 Parallelprojektion ↑ $W_b$ idealer Tiefpaß ! vgl. S. 138

$$\boxed{q \geq \frac{b}{\pi}}$$ ②

! Falls: $\boxed{h \leq \frac{\pi}{b}}$ und $p \geq 2b$ und falls $\hat{g}$ vernachlässigbar für $|\sigma| \geq b$, dann ist praktisch $f_{FB} = W_b * f \approx \delta * f = f$ ↑

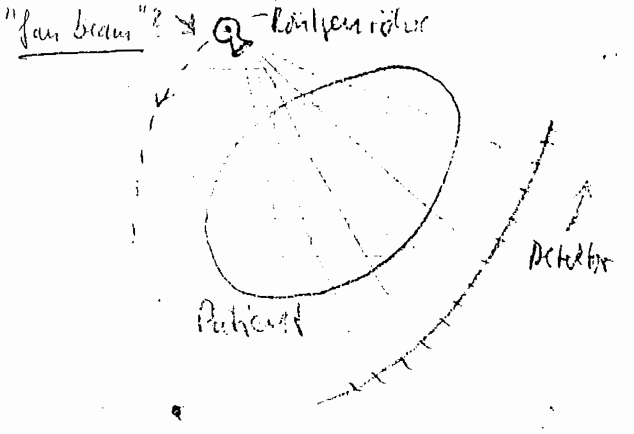
d.h. $\hat{f}(\xi) \sim 0$ für $|\xi| \geq b$ !

d.h. was ist das kleinste Detail im Patienten ?

(vgl. S.148: "Gefilterte Rückproj. für interlaced" !)

## z.B. Gefilterte Rückprojektion für parallele Geometrie (S.147/148: interlaced!)

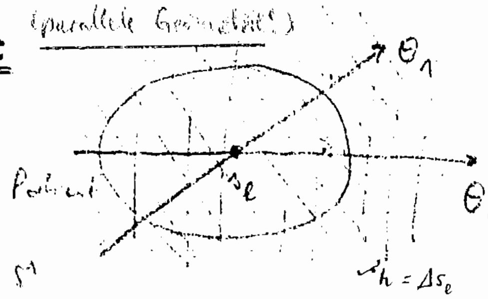
## Anwendung in der Computertomographie:




Sei $f$: (jeweilige) Dichte in Einheitskreis

$g_{j\ell} = (Rf)(\Theta_j, s_\ell)$:

**hier:** (parallele Geometrie!)




Diskr. v. $\mathbb{R}$ — Diskr. v. $[0,2\pi]$ bzw. $S^1$

$$s_\ell = \ell h, \quad \Theta_j = \begin{pmatrix}\cos\varphi_j\\ \sin\varphi_j\end{pmatrix}, \quad \varphi_j = \frac{2\pi j}{p}, \quad j = 0, \dots, p-1$$

"Parallele Geometrie"! (Weiter unten S. 147–148 zeigt sich: Es reicht, die $j, \ell$ mit $j+\ell$ = gerade zu nehmen → "interlaced"?)

(28.01.91)

$f(x) = 0$ für $|x| \geq 1$ ← Bilder endlich (im Einheitskreis!)

$\hat{f}(\xi) \sim 0$ für $|\xi| > b$ ← (wesentlich) b-bandbeschränkt!

(S.o.) ? S. 141

**Gefilterte Rückprojektion ist zuverlässig, falls** ← Aber fehlt noch: Abtasttheorem!

1.) $h \leq \frac{\pi}{b}$ (Nyquist) 2.) $p \geq 2b$ (Rückproj.) 3.) $p = 2\pi q$ ← vgl. S. 144

Daten: $g(\Theta_j, s_\ell)$ mit $\Theta_j = \begin{pmatrix}\cos\varphi_j\\ \sin\varphi_j\end{pmatrix}$, $s_\ell = h\ell$, $\ell = -q, \dots, q$, $\left(h = \frac{1}{q} = \frac{\pi}{b} = \frac{2\pi}{p}\right)$

"Parallele Geometrie"!

Also 3'.) $q \geq \frac{b}{\pi}$ $\qquad \varphi_j = \frac{2\pi}{p} j$, $(j = 0, \dots, p-1)$

$p :=$ # der Richtungen bei $R_p^*$ (diskretisiert für d. $R^*$)

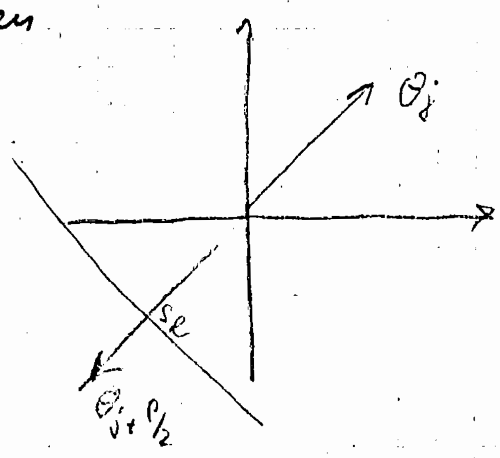
**Bemerkungen: 1.) Anzahl der Daten?**

(Standard) parallele Geometrie: $p$ gerade: $g(\Theta_{j+p/2}, s_\ell) = g(\Theta_j, -s_\ell)$

d.h. man braucht bloß $p/2$ Richtungen

mit $p/2 \geq b$.

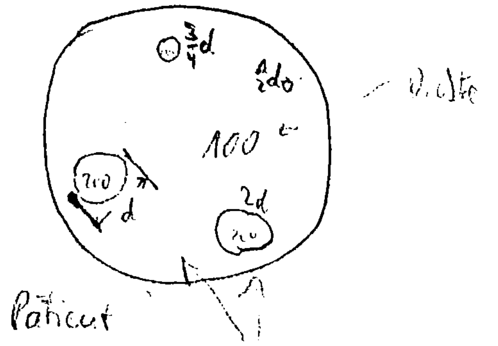
$$\Rightarrow \# \text{Daten} = \frac{p}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{h}}_{\text{für } s_\ell,\ 2 = \text{Durchm. Einheitskreis!}} \overset{\text{Min.\#}}{=} b \, \frac{2}{\pi/b} = \frac{2}{\pi} b^2 \ . !$$



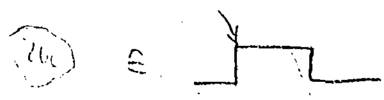

(aber: vgl. S. 147: Interlaced kommt mit der Hälfte der Daten aus!)

## 2.) Auflösung von $\frac{2\pi}{b}$ (in allen Richtungen)

Beispiel: 1.) $p = 128$, $\frac{2\pi}{b} \approx 0.05 =: d$




nicht, aber fast bandbeschränkt!



Diese beiden werden gut rekonstruiert
die anderen beiden nicht!

2.) $p = 128$, $b = 256$, $h = \frac{\pi}{b}$

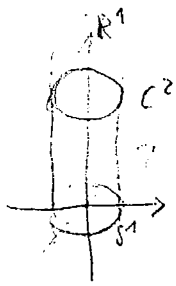
Unterschied zu Pathologisch auf S. 47ff: Jetzt FT und Abtasten auf $C^2$! (statt $\mathbb{R}^n$!)

## §4 Das Abtasttheorem der Computer-Tomographie

Sei $n = 2$, $f(x) = 0$ für $|x| \geq 1$, $\hat{f}(\xi) \sim 0$ für $|\xi| > b$

Deshalb: $g = Rf$ $\qquad g \in \mathcal{S}(C^2)$.

Abtasttheorem für $\underset{\theta,\varphi}{S^1} \times \underset{s}{\mathbb{R}^1} =: C^2$




Fourier-Trafo auf $C^2$: identifiziere $C^2 = [0,2\pi) \times \mathbb{R}^1$ durch $S^1 \ni \theta = \binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$

$g \in \mathcal{S}(C^2)$ $\qquad C^2 \xrightarrow{FT} \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^1$

$$\underline{\hat{g}(\underset{\in\mathbb{Z}}{k}, \underset{\in\mathbb{R}^1}{\sigma})} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-is\sigma - ik\varphi} \underbrace{g(\varphi, s)}_{\text{soll heißen } g(\theta,s) \text{ nach Identif.}} \, ds \, d\varphi \quad \forall (k,\sigma) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^1 = !$$

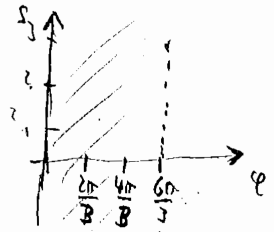
$$\underline{\tilde{g}(\overbrace{\underset{\in[0,2\pi)}{\varphi}, \underset{\in\mathbb{R}^1}{s}}^{C^2})} := \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^1} e^{is\sigma + ik\varphi} \hat{g}(k, \sigma) \, d\sigma$$

$\tilde{\hat{g}} = g$ !

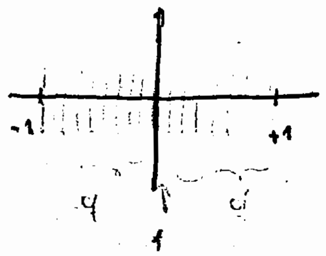
<u>Gitter $L$ auf $C^2$ :</u> $W\mathbb{Z}^2$ $2\pi$-periodisch in der ersten Komponente. (d.h. $2\pi\binom{1}{0}\in W\mathbb{Z}^2$!)

Dann $\underline{L} := W\mathbb{Z}^2 \cap [0,2\pi)\times\mathbb{R}^1$. $\quad$ $\varphi_j$-Komponente! ⇝ zyklisch!

<u>Beispiel:</u> $W = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{p} & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$, $p\in\mathbb{N}$




Nachtrag: [ 3.) Wir haben <u>$2p$ Richtungen</u>. A: <u>$2q+1$ Integrale pro Richtung</u>




$$\frac{1}{q} = h = \frac{\pi}{b} = \frac{2\pi}{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 2\pi q}$$

. ]

Weiter: <u>Duales Gitter :</u> $\underline{2\pi W^{-T}\mathbb{Z} = \hat{L}}$ $\subset \mathbb{Z}\times\mathbb{R}^1$

<u>Lemma:</u> Die erste Komponente von $\hat{L}$ ist ganzzahlig (unter den gegebenen Bedingungen), d.h.: $\hat{g}$ ist definiert auf $\hat{L}$ !

d.h.: $(k,\sigma)\in\underline{\underline{\mathbb{Z}}}\times\mathbb{R}^1$ !

<u>Beweis:</u> <u>z.z.:</u> 1. Zeile von $2\pi W^{-T}$ ist ganzzahlig :

<u>d.h.:</u> $(1,0)\cdot 2\pi W^{-T}$ ganzzahlig

$\Leftrightarrow$ $2\pi W^{-1}\binom{1}{0}$ – " – $\quad\Leftrightarrow$ $2\pi\binom{1}{0}\in W\mathbb{Z}^2$ $\quad\circ$

<u>Satz 4.1.</u> (<u>Poisson'sche Formel</u>) (vgl. S. 45, hier vertauscht man!) $a \rightleftarrows b$ sonst identisch!

Sei $g\in\mathcal{S}(C^2)$. Dann gilt:

$$\sum_{x\in L} g(x)\, e^{-i\xi\cdot x} = \frac{2\pi}{\det(L)}\sum_{\eta\in\hat{L}}\hat{g}(\xi-\eta), \quad (\xi\in\hat{L}).$$

<u>Beweis:</u> Siehe Aufg. 8! $\quad$ ⇝ $(k,\sigma)$ in Fourierraum! $\quad$ {vgl. S. 49 für $K\subseteq\mathbb{R}^4$!}

<u>Def:</u> $K\subseteq\mathbb{Z}^1\times\mathbb{R}^1$. <u>$L$ erfüllt die Nyquist-Bedingung bzgl. $K$</u>

$:\Leftrightarrow$ $K+\eta$, $\eta\in\hat{L}$ sind disjunkt.

Hier geht es ausschließlich um $\underline{g}$ (= Rf) im $C^2$! Von f ist noch nicht die Rede! 145

## Satz 4.2. (Petersen-Middleton) (für CT?)

Sei $g \in \mathcal{S}(C^2)$. $\hat{g}(\xi) = 0$ für $\xi \notin K$. L erfülle bzgl. K die Nyquist-Bedingung. ← d.h. $K+\eta$, $\eta \in \hat{L}$, disjunkt!

Dann ist $g$ durch seine Werte auf $\hat{L}$ eindeutig bestimmt.

Erfüllen $g_1, g_2$ die obigen Bedingungen, so gilt:

$$\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} g_1 g_2 \, ds \, d\varphi = \det(L) \sum_{x\in L} g_1(x) g_2(x) .$$

da jetzt $C^2$ statt $\mathbb{R}^2$: komplizierteres Struktur ??

Anmerkung: Das alles ist wesentlich Gruppentheorie! (harmonische Analysis, ...)

**Anwendung auf $g = Rf$:** Abtasttheorem verlangt: $\hat{g}(\xi) = 0 \;\; \forall \xi \notin K$ :

$$\text{Hier:} \quad \hat{g}(\underset{\mathbb{Z}}{k}, \underset{\mathbb{R}}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-is\sigma} g(\varphi, s)\, ds}_{= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\sigma\Theta)} \, d\varphi \qquad , \quad \Theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Frage nach P.M.: wo ~0? Das ergibt K!

$$= \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \hat{f}(\sigma\Theta)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, e^{-ix\cdot\sigma\Theta}\, dx\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi - ix\sigma\cdot\Theta}\, d\varphi}_{\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi - i|x|\sigma\cos(\varphi-\psi)}\, d\varphi} \, dx \qquad x = |x| \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$$

$$\varphi - \psi = \varphi'$$

$$= e^{-ik\psi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi' - i|x|\sigma\cos\varphi'}\, d\varphi'$$

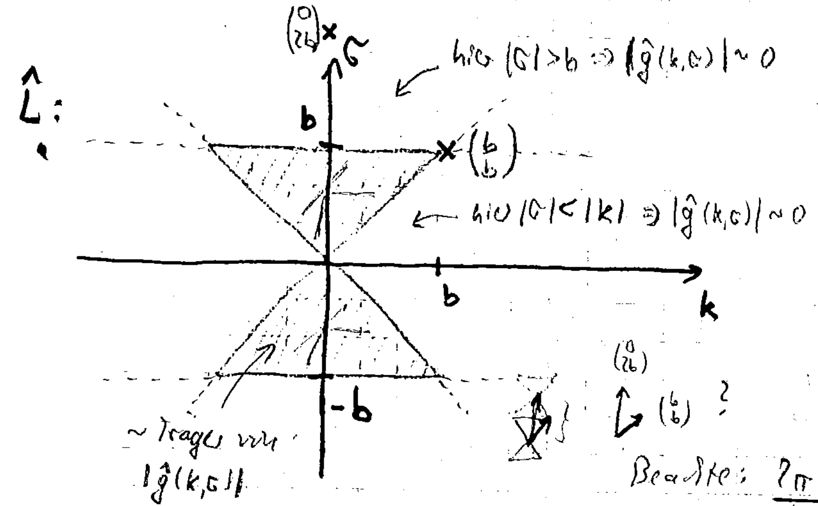
$$= e^{-ik\psi} J_k(-\sigma|x|)\, i^k\, 2\pi$$

$$\Rightarrow \underline{|\hat{g}(k,\sigma)|} \overset{\text{z.z.}}{\leq} \int_{\substack{\mathbb{R}^2 \\ |x|<1}} |f(x)|\,|J_k(\sigma|x|)|\,dx < \overset{\text{d.h. } \sim 0}{\text{sehr klein}}, \text{ falls } \underline{|\sigma| < |k|}$$

("Debye'sche Beziehung")

und: $\underline{|\hat{g}(k,\sigma)| \sim 0 \text{, falls } |\sigma| > b}$

Wähle also $K$ wie folgt:




← außerhalb $\boxed{\;} =: K$ ist $\tilde{g} \sim 0$

Wähle also:

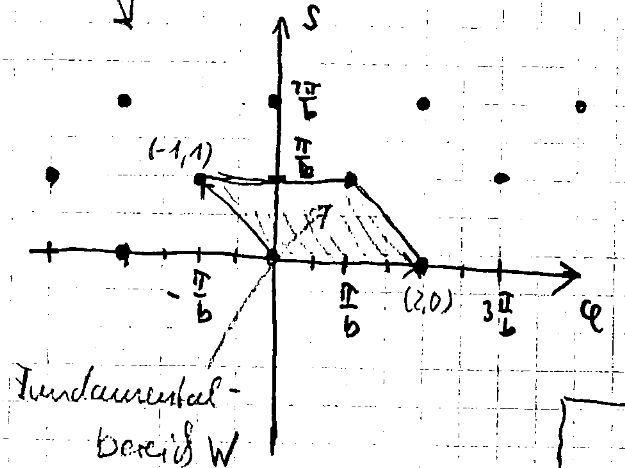
$$2\pi W^{-T} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 2b & b \end{pmatrix}$$

Beachte: $\frac{2\pi W^{-T}\mathbb{Z} = \hat{L}}{L \triangleq W\mathbb{Z}^2}$ Abtasttheorem! im wesentl.

**L erfüllt Nyquist-Bedingung bzgl. K !**

⇒ Abtasttheorem, vgl. Def. Nyquist Bed. oben! (S. 144)

$$\Rightarrow W = \frac{\pi}{b} \cdot \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$




**Interlaced:**

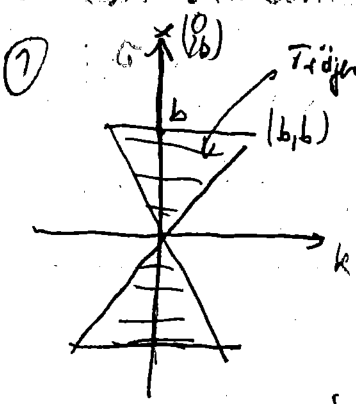
$$\varphi_j = j\,\frac{\pi}{b}$$

$$s_{jl} = \frac{\pi}{b}\,l\,, \quad l+j \text{ gerade}$$

(vgl. S. 74, 75 in {NAT}!)

Anm: Vgl. auch die analogen Betrachtungen auf S. 47 ff !!

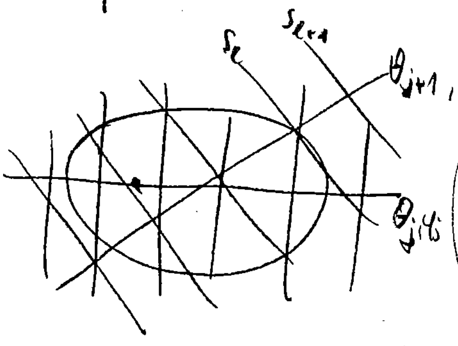
(Diese Seite evtl. etwas permutiert) (31.01.91) 147

① 


Träger von $\hat{g}$, $g = Rf$, $g = g(\varphi, s)$ ← parallele Geometrie! ($[0,2\pi)$, $\mathbb{R}$; $\theta_j = \binom{\cos\varphi_j}{\sin\varphi_j}$)

② $2\pi W^{-T} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 2b & b \end{pmatrix}$, $W = \frac{\pi}{b}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

↑ (s.o.)




Interlaced $\{\varphi_j = j\Delta\varphi$, (parallele Geometrie) $\Delta\varphi = \frac{\pi}{b} = \frac{2\pi}{p}$

$s_{jl} = lh$, $h = \frac{\pi}{b}$ $(j = 0, \ldots, p-1)$

⇒: $\underline{j + l \text{ gerade}}$ !(?) $(l = -q, \ldots, q)$

⇒ Faktor $\frac{1}{2}$ (?) $q = \frac{1}{h} = \frac{b}{\pi}$

$b$ ganz, $p = 2b$

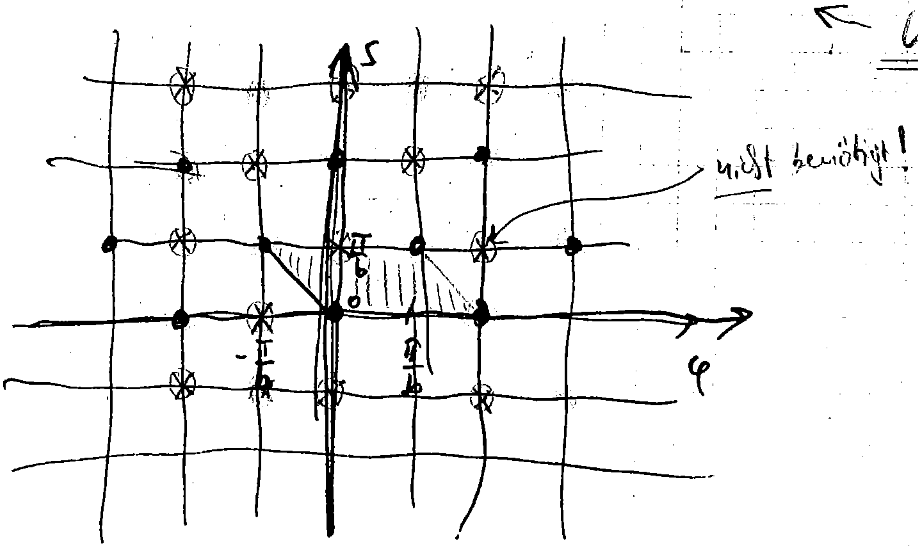
<u>$\#$ Daten:</u> $g(\theta_j, s_l) = g(\theta_{j+\frac{p}{2}}, -s_l)$

$\theta_{j+\frac{p}{2}} = -\theta_j$

$\frac{p}{2} \cdot \frac{2}{2h} = b \frac{2}{2 \cdot \frac{\pi}{b}} = \underline{\frac{1}{\pi} b^2}$ !, $\cancel{[\ ]}$

<u>d.h. nur die Hälfte von [ ]</u> (S. 142! unten)

← <u>Abtasten</u>




Wir haben nun also $g = Rf$ zuverlässig abgetastet. (Abtast-Theorem.)
Wie kommt man nun aber an $f$ ran?

**Nun: gefilterte Rückprojektion für interlaced:** (vgl. auch S. 137?)

$$\underline{W_b * f(x)} = \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1}}_{C^2} \underbrace{w_b(x\cdot\theta - s)}_{=h(\varphi,s)} \underbrace{g(\theta,s)}_{\text{supp}(\hat g) \subseteq K} ds\, d\varphi \,, \quad \theta = \begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

RAM LAK ?

(im Wesentlichen

also: $\underline{h(\varphi,s)} = w_b(x\cdot\theta - s)$

$$\curvearrowright \quad \underline{\hat h(k,\sigma)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} h(\varphi,s)\, e^{-i(k\varphi + s\sigma)}\, ds\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^1} w_b(x\cdot\theta - s)\, e^{-is\sigma}\, ds}_{\int_{\mathbb{R}^1} w_b(s') e^{-i(x\cdot\theta - s')\sigma} ds'} d\varphi$$

$(x\cdot\theta - s = s')$

$$= \sqrt{2\pi}\, \hat w_b(-\sigma)\, e^{-ix\cdot\theta\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi - ix\cdot\theta\sigma}\, d\varphi \;\; \hat w_b(-\sigma) \qquad x = |x| \begin{pmatrix}\cos\psi \\ \sin\psi\end{pmatrix}$$

$$\underline{= \sqrt{2\pi}\; e^{-ik\psi}\, i^k\, J_k(|x|\sigma)\, \underbrace{\hat w_b(-\sigma)}_{=0,\ |\sigma|>b}}$$

$|x| \leq 1$: $\quad \underline{\sim 0} \begin{cases} \text{falls } |\sigma| > b \\ \text{oder } |\sigma| < |k| \end{cases}$ , d.h. falls $(k,\sigma) \notin K$ ,

↷ Nach Petersen - Middleton: mit großer Genauigkeit:

**Diskret:** $\underline{W_b * f} = \det(L) \sum_{(\varphi,s)\in L} w_b(x\cdot\theta - s)\; g(\theta,s) \;=$

Distr. von $[0,2\pi)$ bzw. $S^1$ — Distr. von $\mathbb{R}$

$W * f =$ aus diskreter Rückproj. (Trapezregel?) — aus diskreter Faltung!

$$\approx \frac{2\pi^2}{b^2} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{\ell=-q}^{q} W_b(x\cdot\theta_j - h\ell)\, g(\theta_j, h\ell), \quad = R_p^* W_b \overset{h}{*} g$$

vgl. S. 139, 140

Wichtig! $\ell + j$ gerade! → interlaced

$$\theta_j = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{j\pi}{p}\right) \\ \sin\left(\frac{j\pi}{p}\right) \end{pmatrix}$$

Gefilterte Rückprojektion für interlaced. Rechte Seite: Nach diskreter Faltung mit $W_b$ und diskreter Rückproj!

Diskretisierte Form von $R^* W_b * g$

↳ diskret gefaltet: $\sum_{-q}^{q} W_b(s-h\ell)\, g(\theta, h\ell)$
dann diskret rückproj.: $\sum_{j=0}^{p-1} \ldots$ $s \rightsquigarrow x\cdot\theta_j$, $\theta \rightsquigarrow \theta_j$

Hinweis: Sampling schemes for $D = 12$

Interlaced, PET, Parallel, Fan beam

! "Direkte algebraische Methode" ! ↳ (vgl. auch Kap. Effiz. Algor.!)

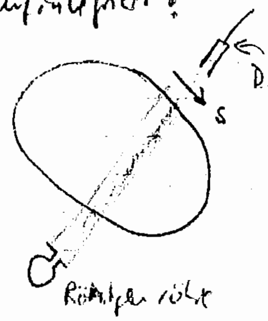
# §5 Bildrekonstruktion aus Streifenintegralen

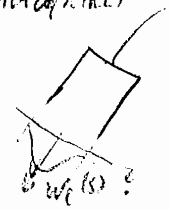
(vgl. [Nat], S. 146 ff (Kap. V.5.?)!)

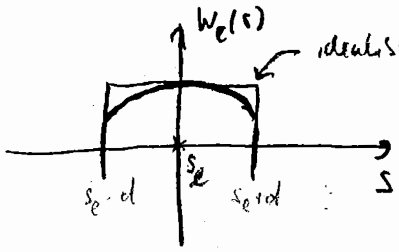
$$g_{\ell j} = \int_{s=-\infty}^{+\infty} W_\ell(s)\, Rf(\theta_j, s)\, ds$$ zusätzlich aufintegriert!

$(j = 0, \ldots, p-1;\ \ell = 1, \ldots, q)$

$W_\ell$ = Empfindlichkeitsprofil des $\ell$-ten Detektors!




! Problem: $g_{j\ell}$ bekannt, finde $f$! !

Also jetzt: zusätzlich noch über $\Delta s$ aufintegriert! (bisher: $Rf$ bekannt, $f$ gesucht!)

$$g_{j\ell} = \int W_\ell(s) \int f(\underbrace{s\theta_j + t\theta_j^\perp}_{=:x})\, dt\, ds$$

(Alles klar?!)

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, W_\ell(x\cdot\theta_j)\, dx \quad := \langle f, W_\ell(x\cdot\theta_j)\rangle$$

$$= (f, W_{j\ell}) =: R_{j\ell} f, \quad W_{j\ell}(x) = W_\ell(x\cdot\theta_j), \quad = \text{(b.w.)}$$

$$(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L_2(|x|<1)}$$

Löse also $g_{je} = R_{je} f$ $(j = 0,\dots,p-1,\ e = 1,\dots,q)$

$= R_{je} f$ ($R_{je}$ lineare stetige Funktionale auf $L_2(|x|<1) =: H$)

Löse also $R_{je} f = g_{je} [= (f, w_{je})]$

mit $R_{je} f = \langle f, w_e(x \cdot \theta_j) \rangle$

→ Bündeln:

Sei $R_j f := \begin{pmatrix} R_{j1} f \\ \vdots \\ R_{jq} f \end{pmatrix}$, $R_j : H \to \mathbb{R}^q$

$Rf := \begin{pmatrix} R_0 f \\ \vdots \\ R_{p-1} f \end{pmatrix}$, $R : H \longrightarrow \mathbb{R}^{qp}$

Also: $R \hat{=} \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_{p-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}q \\ \}q \\ \\ \}q \end{matrix}$ insges. $pq$

$RR^* \hat{=}$ $pq \times pq$

$g_j := \begin{pmatrix} g_{j1} \\ \vdots \\ g_{jq} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$, $g := \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{pq}$

Problem → $Rf = g$ Suche Tychonoff-Phillips-Lösung: → „$f_\omega$"

überbestimmtes System ⇒ (vgl. S.127!) $\min \{ \| Rf - g \|^2 + \omega^2 \| f \|^2 \}$

Euklid. Norm in $\mathbb{R}^{pq}$ — Norm in $L_2(|x|<1)$

Ergibt GLGssystem! Löse dieses!

Nach Satz 1.4.: (S.128!) ((R besitzt ja SVD!?)) → $f_\omega$ ist Lsg von:

$$(R^* R + \omega^2 I) \underbrace{f_\omega}_{=: R^* h} = R^* g$$

$$R^* : \mathbb{R}^{pq} \to H = L_2(|x|<1)$$

Sei $f_\omega = R^* h$, $h \in \mathbb{R}^{pq}$

$$\Rightarrow (R^* R + \omega^2 I) R^* h = R^* g$$

$$\Rightarrow (R^* R R^* + \omega^2 R^*) h = R^* g$$

kleine Umformung

$$\Rightarrow \underline{R^*(RR^* + \omega^2 I)\, h = R^* g} \qquad (*)$$

<u>Aus FA I</u> $H, K$ Hilbert-räume, $R: H \to K$ lin. stetig

$R^*: K \to H$

Falls $R(H) = K$, d.h. $R$ surj., dann ist $R^*$ injektiv.

<u>Hier:</u> $R$ ist surjektiv

also: <u>$R^*$ injektiv</u> $\Rightarrow$ $R^*$ kann in $(*)$ weggekürzt werden

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f_\omega &= \underset{\text{Rückproj.}}{R^* h} \\ \| h &= (RR^* + \omega^2 I)^{-1} g \,\| \end{aligned}}$$

zu lösen!

(... nicht Pass zu ... , nur die gefilterte Rückproj. !?)
(vgl. INAT, S. 148 ff !)

<u>$(RR^* + \omega^2 I)$ ist aber eine $(pq, pq)$ - Matrix</u> (d.h. <u>riesengroß!</u>)
zu groß, um <u>direkt</u> gelöst zu werden!

(Erstmal alles vollständig exakt! Keine Diskretisierungen oder Näherungen!)

Deshalb: bringe auf Block-Toeplitz-Form (folgt aus Rotationsinvarianz!): $\to S_{k-j}$ (s.u.)
Dieses löse dann mit FFT!

$$(R^* g)(x) = \sum_{j,l} g_{jl}\, w_{jl}(x) \quad (\text{Seite } \S 1)$$

$$= \sum_j \underbrace{\sum_l g_{jl}\, w_{jl}(x)}_{R_j^* g_j} = \sum_j (R_j^* g_j)(x)$$

(etwa INAT, S. 133 f. ?)

$$\leadsto \underline{RR^*} = \begin{pmatrix} R_0 R_0^* & \cdots & R_0 R_{p-1}^* \\ \vdots & & \\ R_{p-1} R_0^* & \cdots & R_{p-1} R_{p-1}^* \end{pmatrix} = \underbrace{(R_i R_j^*)}_{\text{jeweils } (q,q)\text{- Matrizen}}{}_{i,j = 0,\dots,p-1}$$

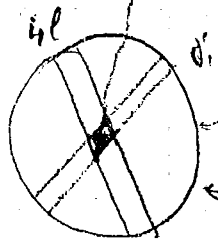
$$R_{ik} R_j^* g_j = R_{ik} \sum_l g_{jl}\, w_{jl} = \Big(w_{ik}, \sum_l g_{jl}\, w_{jl}\Big) = \sum_l g_{jl}\, (w_{ik}, w_{jl})$$

$$\Rightarrow \quad (R_i R_j^*)_{kl} = (w_{ik}, w_{jl}) = \left(\langle \cdot, w_k(x\cdot\theta_i)\rangle, \langle \cdot, w_l(x\cdot\theta_j)\rangle\right)$$

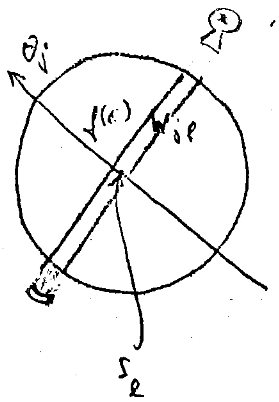
nur von der Geometrie (dem Aufbau) abhängig!

**RR* heißt "Schnittmatrix".**

♦ darüber wird integriert! (≙ z.B. Fläche dieses ♦ bei geeignetem $w_{ik}$!)




(04.02.91) Streifen statt Linien!




$$g_{jl} = \int w_{jl}(x) f(x)\,dx \quad (j = 0, \dots, p-1,\ l = 1, \dots, q)$$

$$R : L_2(|x|<1) \to \mathbb{R}^{pq},$$

$$R = \begin{pmatrix} R_0 \\ \vdots \\ R_{p-1} \end{pmatrix}, \quad R_j f = \begin{pmatrix} R_{j1} f \\ \vdots \\ R_{jq} f \end{pmatrix}$$

⇒ Tychonow-Phill.-Lsg von (vgl. S. 127!) (vgl. auch ENot, Effiz. Alg. V-23?!)

$$Rf = g$$

läßt sich schreiben als:
$$\left\{ \begin{aligned} (RR^* + \omega^2 I)\, h &= g \\ f_\omega &= R^* h \end{aligned} \right\}$$

Es ist:
$$RR^* = \begin{pmatrix} R_0 R_0^* & \dots & R_0 R_{p-1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ R_{p-1} R_0^* & \dots & R_{p-1} R_{p-1}^* \end{pmatrix}$$
} ist nicht etwa dünn besetzt! (→ zu aufwendig, es direkt zu lösen! Mit besser Rot. invarianz des Systems? s.u.!)

$$R_j : L_2(|x|<1) \to \mathbb{R}^q$$

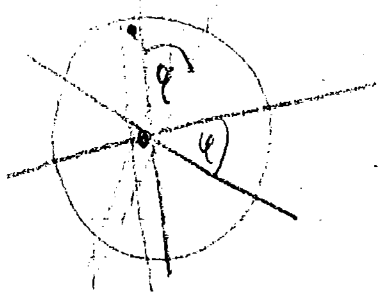
$$R_j R_k^* : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$$

Es gilt: $\underline{(R_j R_k^*)_{il}} = \int\limits_{|x|<1} W_{jl}\, W_{ki}\, dx =: \underline{(S_{jk})_{il}}$

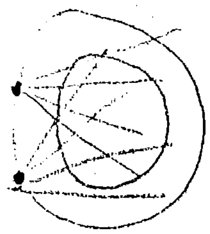
d.h. der Versuchsaufbau!

**Annahme:** Die $w_{jl}$ seien rotationssymmetrisch, d.h. $\qquad \varphi = \frac{2\pi}{p}$

$$w_{jl}(U^{-1}x) = w_{j+1,l}(x) \qquad \text{für } U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



bzw.



$$\rightarrow (S_{j+1\,k+1})_{il} = \int\limits_{|x|<1} w_{j+1,l}(x)\, w_{k+1,l}(x)\, dx$$

$$= \int\limits_{|x|<1} w_{jl}(\underbrace{U^{-1}x}_{x'})\, w_{ki}(U^{-1}x)\, dx$$

Transf.formel

$$= \int\limits_{|x'|<1} w_{jl}(x')\, w_{kl}(x')\, dx'$$

$$= (S_{j,k})_{il} \qquad \{\text{Nat S. 148}\}$$

D.h.: $\underline{S_{j,k}} = \cancel{S_{k-j}}$ (will sagen: Es kommt nur auf die Differenz der Indizes an!)

$\underline{= S_{k-j}}$

$S * h = g$

Löse also mit FFT-Techniken wie folgt:

$$\Rightarrow \underline{RR^*} = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \cdots & S_{p-1} \\ S_{p-1} & S_0 & S_1 & & S_{p-2} \\ S_{-2} & & & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ S_{1-p} & \cdots & & S_{-1} & S_0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{\hat{=} \text{ eine Faltung!}}}$$

$= S_{-1}$

d.h. folgende Teile geht um wraparound durch Shifts. Sonst

## Allgemein:

Erinnerung: $\hat{y}_k = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi i jk/p}\, y_j$ (diskr. FT)

umgek. $y_j = \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi i jk/p}\, \hat{y}_k$

falls: $\underbrace{y_k = \sum_{j=0}^{p-1} z_{k-j}\, x_j}_{\text{zykl. Faltung der Periode } p!}$, $z$ Periode $p$, $(k=0,\dots,p-1)$

$\Rightarrow \hat{y}_k = p\, \hat{z}_k \hat{x}_k$

Lösen eines Glgssystems $y = Zx$ mit $Z \equiv \begin{pmatrix} z_0 & z_{-1} & & z_{1-p} \\ z_1 & z_0 & & z_{2-p} \\ \vdots & & & \vdots \\ z_{p-1} & & \dots & z_0 \end{pmatrix}$:

1.) Bilde $\overset{\text{FFT!}}{\text{FT}}$ von $y$: $\hat{y}_k$ $\qquad (p \log p)$ RO

2.) $\hat{x}_k = \frac{1}{p}(\hat{z}_k)^{-1} \cdot \hat{y}_k$ $\qquad p$ RO

3.) $x_j$ durch inverse FT von $\hat{x}_k$. $\qquad (p \log p)$ RO

$\Rightarrow$ insgesamt $p \log p$ RO

(anstatt von $p^2$ RO!)

## Speziell hier:

Übertragung auf den

Algorithmus zur Lösung von $(RR^* + \omega^2 I)h = g$: (nur Notizen!)

daß weggelassen? Nein!

1.) $\hat{S}_k = \sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi i jk/p}\, S_j'$, $\quad S_j' = \begin{cases} S_j & \text{für } j \neq 0 \\ S_0 + \omega^2 \underline{\underline{I_0}} & \text{für } j = 0 \end{cases}$

$\hat{=}\ p \log p\, q^2$ RO

2.) $\hat{S}_k^{-1}$ (hier stehen plötzlich Matrizen! s.u.?) $\hat{=}\ q^3 p$ RO

3.) $g = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{p-1} \end{pmatrix}$, $g_j \in \mathbb{R}^q$ $\Rightarrow$

$$\hat{g}_k = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi i jk/p} g_j \qquad \hat{=}\ qp \log p \text{ RO}$$

4.) $\hat{h}_k = \frac{1}{p} \underbrace{\hat{\Gamma}_k^{-1}}_{} \hat{g}_k \qquad \hat{=}\ pq^2 \text{ RO}$

existieren eigentlich gar nicht

5.) $h_j = \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi i jk/p} \hat{h}_k \qquad \hat{=}\ qp \log p \text{ RO}$

Ende der Rekonstruktion :

6.) $f_w = R^* h(x) = \sum_{\substack{j,\ell \text{ mit} \\ w_{j\ell}(x) \neq 0}} h_{j\ell} w_{j\ell}(x)$ Rückproj.

sind nur wenige
(eben die Streifen, über den integriert wird!)

<vgl. auch {Nat, Skript Effiz. Algorithmen, Anwendungen in der CT ? }>

Rechenaufwand :

Schritte (1) und (2) : nur einmal
Schritte (3) - (6) : für jeden Datensatz

} insgesamt $\cong \sim pq^2 \text{ RO} + pq \log p$

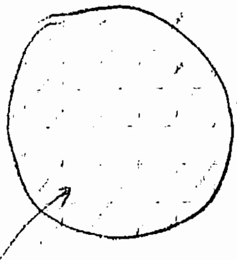
d.h. praktisch gleicher Rechenaufwand wie bisher ( laut {Nat} : insgesamt $pq^2 + pq \log p$ RO!

Frage bleibt : was ist mit (2) ? :

$\hat{\Gamma}_k$ im allg. nicht invertierbar ! Denn :

$RR^*$ im allg. nicht inv.bar . denn $RR^*$ ist Gramsche Matrix der Funktionen $w_{j\ell}$ . Diese Fu.en sind im allg. nicht lin. unabhängig !

Grund:



Streifen sollen sich nicht überlappen!

$$\Rightarrow \sum_{\ell=1}^{q} w_{j\ell} = 1 \quad \text{in } |x|<1$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell} w_{j\ell} = \sum_{\ell} w_{k\ell}, \quad \forall k,\ell$$

$\Rightarrow$ lin. abh.

**!** <u>Es zeigt sich: lediglich $\hat{S}_0$ ist invertierbar</u>, <u>alle anderen nicht!</u> (Kern nicht!) } Schritt 2! <u>so</u> also nicht möglich!

<u>Abhilfe:</u> Ersetze $(\hat{S}_h)^{-1}$ durch $\hat{S}_h^{+}$ = "Moore-Penrose-Inverse"

<u>Denn:</u> zu lösen: $\hat{g}_k \doteq p\,\hat{S}_h \hat{h}_k$ (vgl. Schritt 4.)!). Dies ist <u>lösbar, aber nicht eindeutig!</u>

Die Moore-Penr.-Inverse nimmt halt <u>irgendeine</u> dieser Lösungen!

Moore Penr. Inverse

$$\Rightarrow \hat{h}_k = \hat{h}_k^{+} + \hat{z}_k \quad \text{mit } \underline{\hat{z}_k \in Ker(\hat{S}_h)}$$

$$h_k = h_k^{+} + z_k$$

$$\underline{f_W = f_W^{+}} + \underbrace{\cancel{R^* z}}_{=0}, \quad z = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{p-1} \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_h \hat{z}_k = 0 \iff RR^* z = 0 \iff R^* z = 0$$

Im Folgenden: über die Schlechtgestelltheit:

## §6 Die SVD der Radon-Transformation

<u>Hier:</u> $n=2$.

$$\underline{R_\theta f(s)} := (Rf)(\theta, s)$$

$D(f) \subset \{|x|<1\}$, da Bild? $\qquad s \in [-1,+1]$!

$$R_\theta : L_2(|x|<1) \longrightarrow L_2([-1,+1])$$

$$\Rightarrow \quad R_\theta^* g(x) = g(\theta \cdot x)$$

**Lemma 6.1.:** $$R_{\theta_1} R_{\theta_2}^* g(s) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{+\sqrt{1-s^2}} g(s\cos\varphi + t\sin\varphi)\, dt$$

mit $\theta_1 \cdot \theta_2 =: \cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$

d.h. $\varphi$ ist $\measuredangle$ zwischen $\theta_1$ und $\theta_2$ !

**Beweis:** OE: $\theta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow \theta_2 = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow R_{\theta_1} \cdot R_{\theta_2}^* g(s) = \int_{\mathbb{R}^1} (R_{\theta_2}^* g)(\overbrace{s\theta_1 + t\theta_1^\perp}^{x})\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} g(\theta_2 \cdot (s\theta_1 + t\theta_1^\perp))\, dt = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{+\sqrt{1-s^2}} g(s\cos\varphi + t\sin\varphi)\, dt$$

wegen $|x| \overset{!}{\le} 1$ $\square$

**Tschebyscheff-Polynome 2. Art:** $U_m(s) := \dfrac{\sin(m+1)\varphi}{\sin\varphi}$,

mit $\cos\varphi := s$, $-1 \le s \le 1$

sind Polynome vom Grade $m$ in $s$ (Additionstheoreme!)

$$\int_{-1}^{+1} w(s) U_m(s) U_\ell(s)\, ds = \begin{cases} 0, & \ell \ne m \\ \frac{\pi}{2}, & \ell = m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Orthogonal bzgl. Skalarprodukt $\int w f g\, ds$ ?

$$w(s) := (1-s^2)^{1/2}$$

**Lemma 6.2.:** $$R_{\theta_1} R_{\theta_2}^* U_m = \underbrace{\alpha_m(\theta_1 \cdot \theta_2)}_{\text{Winkelabhängigkeit}}\, w\, U_m$$

**Beweis:** **(i)** Wende Lemma 6.1. auf $g := s^j t^{k-j}$ an

($j = 0, \dots, m$ ; $m = 0, 1, 2, \dots$ )

$$\int_{-\sqrt{1-s^2}}^{+\sqrt{1-s^2}} s^j t^{m-j}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } m-j \text{ ungerade} \\ \sim s^j \sqrt{1-s^2}^{\,m-j+1} = \sqrt{1-s^2}\, P_m(s) & \text{für } m-j \text{ gerade} \end{cases}$$

Polynom m-ten Grades

**(ii)** $g = U_m$

$$R_{\theta_1} R^*_{\theta_2}(s) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{+\sqrt{1-s^2}} U_m(s\cos\varphi + t\sin\varphi)\, dt = \sqrt{1-s^2}\, P_m(s)$$

mit $P_m$ Polynom vom Grade $m$

Bef: $P_m$ ist Tschebyscheff-Pol. 2. Art!

Bew: $$\left(R_{\theta_1} R^*_{\theta_2} U_m, U_\ell\right) = \int_{-1}^{+1} (\dots)\, ds$$

$$\| \qquad\qquad (*)$$

$$\int_{-1}^{+1} \underbrace{\sqrt{1-s^2}\, P_m(s)\, U_\ell(s)\, ds}_{\hat{=} \text{ inneres Prod. bzgl. Gewichtsfkt. } \sqrt{1-s^2}} = 0 \text{ für } m < \ell$$

Bef: $= 0$ gilt auch für $m > \ell$!

Bew: $$(R_{\theta_1} R^*_{\theta_2})^* = R_{\theta_2} R^*_{\theta_1} \underset{\uparrow}{=} R_{\theta_1} R^*_{\theta_2}$$

siehe Lemma 6.1.

$\Rightarrow$ $R_{\theta_1} R^*_{\theta_2}$ ist symmetr. Operator (s.o.)

Also gilt (*) auch mit $l,m$ vertauscht, d.h.

$$(R_{\theta_1} R^*_{\theta_2} U_m , U_l) = 0 \qquad \forall\, l \neq m$$

$$\Rightarrow \quad R_{\theta_1} R^*_{\theta_2} U_m = \alpha_m(\theta_1\cdot\theta_2)\sqrt{1-s^2}\, U_m$$

vollständig Pol. (des ON-Systems

$$\alpha_m(\theta_1\cdot\theta_2) = \lim_{s\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}\, U_m(s)} \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{+\sqrt{1-s^2}} U_m(s\cos\varphi + t\sin\varphi)\, dt \;=$$

(mit $\cos\varphi := \cos\theta_1\cdot\theta_2$ ).

$$= \frac{2\cdot U_m(\theta_1\cdot\theta_2)}{U_m(1)} \qquad \square$$

(07.02.91)

Letzte Std: $R_{\theta_1} R^*_{\theta_2} U_m = \alpha_m(\theta_1\cdot\theta_2)\, w\, U_m \qquad w(s) = (1-s^2)^{1/2}$

$$\alpha_m(t) = \frac{2U_m(t)}{U_m(1)},$$

$$U_m(t) = \frac{\sin(m+1)\varphi}{\sin\varphi}, \quad \cos\varphi = t, \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

$$U_m(1) = m+1$$

$L_2([-1,+1]; w^{-1})$ inneres Produkt $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{w} f\,\bar{g}\, ds =: (f,g)_{w^{-1}}$

$$R : L_2(|x|<1) \to L_2([-1,+1], w^{-1})$$

Damit ändert sich die Adjungierte:

$\underline{R^\#}$: $(R_\theta f, g)_{w^{-1}} = \int w^{-1}(s) \int_{\mathbb{R}^1} f(\underbrace{s\theta + t\theta^\perp}_{x})\, dt\, g(s)\, ds =$

$$= \int f(x)\, w^{-1}(x\cdot\theta)\, g(x\cdot\theta)\, dx = (f, R^\#_\theta g)_{L_2(|x|<1)}$$

d.h. $R^{\#} g(x) = (w^{-1} g)(x \cdot \theta)$

schreibe: $R^{\#}_\theta g = R^{\#}_\theta (\underbrace{w^{-1} g}_{=: g' \text{ (od. } \tilde{g})})$

$$\Rightarrow R^{\#}_\theta (w g') = R^*_\theta g'$$

$$R^{\#}_{\theta_1} R^*_{\theta_2} (\underbrace{w U_m}_{=: u_m}) = \alpha_m (\theta_1, \theta_2) \underbrace{w U_m}_{u_m}$$

$$\Rightarrow R_{\theta_1} R^{\#}_{\theta_2} u_m = \alpha_m (\theta_1 \cdot \theta_2) u_m$$

**Nun:** $R : L_2(|x|<1) \longrightarrow L_2(Z, w^{-1})$

$$(f,g)_{w^{-1}} = \int_{S^1} \int_{-1}^{+1} w^{-1} f \bar{g} \, ds \, d\theta$$

$$R^{\#} g(x) = \int_{S^1} w^{-1}(x \cdot \theta) \, g(\theta, x \cdot \theta) \, d\theta = \int_{S^1} R^{\#}_\theta g(x) \, d\theta$$

**Lemma 6.3.:** Der Operator $RR^{\#}$ hat die Eigenfunktionen
$$g_{m,\ell}^{(\theta,s)} = c_m U_m(s) e^{i\ell\varphi}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten $\sigma^2_{m,\ell} = \dfrac{4\pi}{m+1}$ $\quad (m = 0,1,2,\ldots$
$\ell = -m, -m+2, \ldots, m-2, m)$

**Beweis:** $RR^{\#}(h u_m)(\omega, s) = R_\omega R^{\#}(h u_m)(s) =$

$(h = h(\theta))$ $\quad = \left( R_\omega \int_{S^1} R^{\#}_\theta h \, u_m (x) \, d\theta \right)(s)$

$$= \int_{S^1} (R_\omega R^*_\theta h u_m)(s) \, d\theta$$

Wegen $(R_\omega R_\theta^{\#} h u_m) \overset{s.o.}{=} \alpha_m(\omega\cdot\theta)\, u_m(s)\cdot h(\theta)$ folgt:

$$\ldots = \int_{S^1} \alpha_m(\omega\cdot\theta) u_m(s)\, h(\theta)\, d\theta = \underbrace{\int_{S^1} \alpha_m(\omega\cdot\theta)\, h(\theta)\, d\theta}_{=:(A_m h)(\omega)}\, u_m(s)$$

also: $(A_m h)(\omega) = \int_{S^1} \alpha_m(\omega\cdot\theta)\, h(\theta)\, d\theta$

$$h(\theta) = e^{il\varphi}, \quad \theta = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\end{pmatrix}$$

$$(A_m h)(\omega) = \int_0^{2\pi} \alpha_m(\cos(\underbrace{\varphi-\psi}_{=:\varphi'}))\, e^{il\varphi}\, d\varphi$$

$$= \underbrace{e^{il\psi}}_{h(\omega)} \underbrace{\int_0^{2\pi} \alpha_m(\cos\varphi')\, e^{il\varphi'}\, d\varphi'}_{=:\sigma_{ml}^2}$$

$$\Rightarrow \quad RR^{\#} g_{ml} = \sigma_{ml}^2 g_{ml}$$

$\varphi' \to \varphi' + \pi$

gleiches Integral um $\pi$ verschoben!

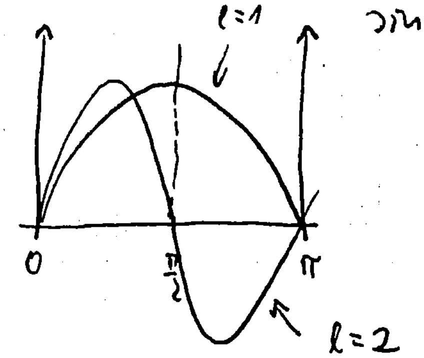
$$g_{ml}(\theta, s) = e^{il\varphi} u_m(s)$$

$$\sigma_{ml}^2 = \int_0^{\pi} \alpha_m(\cos\varphi')\, e^{il\varphi'}\, d\varphi' \cdot \Big(1 + \underbrace{e^{il\pi}}_{(-1)^l} (-1)^m\Big)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } m+l \text{ ungerade} \\ 2\int_0^{\pi} \alpha_m(\cos\varphi)\, e^{il\varphi}\, d\varphi, & \text{falls } l+m \text{ gerade.} \end{cases}$$

<u>m+l gerade:</u> $\quad \sigma_{ml}^2 = 2\int_0^{\pi} \alpha_m(\cos\varphi)\, e^{il\varphi}\, d\varphi =$

$$= \frac{4}{m+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+1)\varphi}{\sin\varphi} (\cos l\varphi + i \sin l\varphi)\, d\varphi$$




bzgl. $\frac{\pi}{2}$
gerade $(l=1)$
ungerade $(l=2)$
...

$\int_0^\pi \cos m\varphi \cos n\varphi \, d\varphi = 0$ falls $n-m$ gerade, $\neq 0$.

$m$ ungerade $\Rightarrow \dfrac{\sin(m+1)\varphi}{\sin\varphi} = 2(\cos m\varphi + \cos(m-1)\varphi + \dots + \cos\varphi)$

$m$ gerade $\Rightarrow$ — " — $= 2(\cos m\varphi + \cos(m-2)\varphi + \dots + \cos 2\varphi) + 1$

$$\int_0^\pi \cos^2 m\varphi \, d\varphi = \begin{cases} \pi, & \text{falls } m=0 \\ \frac{\pi}{2}, & m \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \sigma_{ml}^2 = \dots = \dfrac{4}{m+1}\pi$ .

$\underline{|l| > m}$ : $\sigma_{ml}^2 = 0$ . ∎

## SVD der Radon-Transformation:

$$\underline{RR^\# g_{ml} = \sigma_{ml}^2 g_{ml}} \quad , \underline{g_{ml} = c_m e^{il\varphi} U_m}$$

Normierungsforderung: $c_m^{-2} = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} \underbrace{w^{-1} w^2}_{w} U_m^2 \, ds \, d\varphi$

$(s = \cos\psi)$ $\qquad = 2\pi \int_{-1}^{+1} (1-s^2)^{1/2} \dfrac{\sin(m+1)\psi}{\sin\psi} \, ds$

$= \dots = \pi^2$

$$\underline{\Rightarrow c_m = \frac{1}{\pi}} \, .$$

$$\underline{f_{ml} = \frac{1}{\sigma_{ml}} R^\# g_{ml}}$$

$$\Rightarrow f_{ml}(x) = \frac{1}{\sigma_{ml}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{il\varphi}\, U_m(x\cdot\theta)\, d\varphi \;, \quad \theta = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

Dies sind (orthogonale) Polynome:

$$x = |x| \begin{pmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_{ml}(x) = \frac{1}{\pi\sigma_{ml}} \int_0^{2\pi} e^{il\varphi}\, U_m(|x| \cos \underbrace{(\varphi-\psi)}_{\varphi'})\, d\varphi$$

$$= \frac{e^{il\psi}}{\pi\sigma_{ml}} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{il\varphi'}\, U_m(|x|\cos\varphi')\, d\varphi'}$$

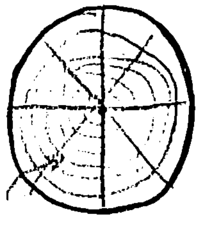
$q_{ml}(|x|)$, $q_{ml}$ Polynom vom Grade $m$

$$\Rightarrow f_{ml}(x) = \frac{1}{\pi\sigma_{ml}} e^{il\psi(x)} q_{ml}(|x|)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow \quad Rf = \sum_{m=0}^{\infty} {\sum_{l=-m}^{m}}' \sigma_{ml} (f, f_{ml})\, g_{ml} \\ &\Sigma' : \text{Nur die Summanden mit } l+m \text{ gerade!} \qquad \left(\sigma_{ml}^2 = \frac{4\pi}{m+1}\right) \\ &R^{-1} g = \sum_{m=0}^{\infty} {\sum_{l=-m}^{m}}' \frac{1}{\sigma_{ml}} (g, g_{ml})\, f_{ml} \end{aligned}}$$

**SVD der Radon-Transformation**

Folgerung: Bei Verdoppelung der Auflösung ⇔ Verdoppelung von $m$

$f_{ml}$ 

$m = 6$

$l = 4$

$\Rightarrow$ (b.w.)

kreisförmige Nullstellen, 6 Stück
da Polynom 6. Grades

wegen $\sigma_{me} \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$ folgt weiter: $\Rightarrow$ Verschlechterung der Stabilität um Faktor $\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ will man die Auflösung verdoppeln, so muss man die Dosis vervierfachen.

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 1 , Abgabe: 22.10.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 1:**
Sei $T$ der Cauchysche Hauptwert, also

$$Tf = \int\!\!\!\!\!\!- \ \frac{f(x)}{x} dx \ .$$

Zeigen Sie:

$$(a) \qquad T'f = \lim_{h \to 0} \left\{ \int_{|x| \geq h} \frac{f(x)}{x^2} + \frac{f(h)+f(-h)}{h} \, dx \right\}$$

$$(b) \qquad Tf = \int \frac{f(x)-f(-x)}{2x} \, dx$$

$$(c) \qquad \hat{T}(\xi) = -i \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \operatorname{sgn} \xi$$

**Aufgabe 2:**
Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $f$ homogen vom Grade $k$ (d.h. $f(tx) = t^k f(x)$ für $t \in \mathbf{R}^1$), so ist $\hat{f}$ homogen vom Grade $-k-n$.

(b) Ist $f$ rotationsinvariant (d.h. $f$ ist eine Funktion von $|x|$), so ist auch $\hat{f}$ rotationsinvariant.

**Aufgabe 3:**
Sei $f \in L_1(\mathbf{R}^n) = \{f : f \text{ meßbar}, \int |f| dx < \infty\}$.
Zeigen Sie: $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$ mit

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} f(x) dx$$

**Aufgabe 4:**
Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -1 \leq x_k \leq 1 \ , \quad k = 1, \ldots, n \ , \\ 0 & , \quad \text{sonst} \quad . \end{cases}$$

Berechnen Sie $\hat{f}$.

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 2 , Abgabe: 29.10.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 5:**
Für $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $r > 0$ sei $f_r(x) = f(rx)$. Für $T \in \mathcal{S}'$ sei

$$T_r f = r^{-n} T f_{1/r} \ .$$

Zeigen Sie:

1) $T_r \in \mathcal{S}'$

2) $\delta = r^n \delta_r$

3) $(T_r)^\wedge = r^{-n}(\hat{T})_{1/r}$

**Aufgabe 6:**
Sei $J_\nu$ die *Bessel*-Funktion 1. Art der Ordnung $\nu$, d.h.

$$J_\nu(x) = (\frac{x}{2})^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \qquad , \nu \geq 0 \ .$$

Zeigen Sie: Ist $f \in L_1(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 2$, eine radiale Funktion (d.h. $f(x) = f(|x|)$) so ist auch $\hat{f}$ radial, und es gibt

$$\hat{f}(\rho) = \rho^{2-n} \int_0^\infty r \ J_{(n-2)/2}(r\rho) f(r) dr$$

<u>Hinweis:</u> Für $n \geq 2$ und $\Theta \in S^{n-1}$ gilt

$$\int_{S^{n-1}} e^{i\sigma\Theta\cdot\omega} d\omega = (2\pi)^{n/2} \sigma^{2-n} \ J_{(n-2)/2}(\sigma)$$

**Aufgabe 7:**
Sei $x \to x' = Ax + a$ eine affine Abbildung in $\mathbf{R}^n$, d.h. $A$ ist eine nicht-singuläre $(n,n)$-Matrix und $a \in \mathbf{R}^n$. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ und $F(x) := f(Ax + a)$.

(a) Zeigen Sie:

$$\hat{F}(A^T\xi) = \frac{1}{\det(A)} e^{ia\cdot\xi} \hat{f}(\xi) \ .$$

(b) $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ heißt radial, wenn für jede Rotation $U$ und jeden $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ gilt

$$Tf = T(f \circ U) \ .$$

Zeigen Sie: Ist $T$ radial, so auch $\hat{T}$.

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 4 , Abgabe: 12.11.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 11:**
Zeigen Sie: Für $h = \frac{\pi}{b}$ bilden die Funktionen

$$f_k(x) = h^{-n/2} \operatorname{sinc} b(x - hk) \ , \qquad k \in \mathbf{Z}^n$$

ein Orthonormalsystem in $L_2(\mathbf{R}^n)$.

**Aufgabe 12:**
Zeigen Sie mit Hilfe der Reihe von Aufgabe 6:

$$\int_0^{\chi} t^{\nu} J_{\nu-1}(t)dt = \chi^{\nu} J_{\nu}(\chi) \ , \qquad \nu \geq 1 \ .$$

**Aufgabe 13:**
Sei $S_h f$ die sinc-Reihe für $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, d.h.

$$(S_h f)(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} f(hk) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{h}(x - hk) \ .$$

Zeigen Sie:

$$\int (S_h f)(x)dx = h^n \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} f(hk)$$

**Aufgabe 14:**
Sei für $\varepsilon > 0$, $b > 0$

$$f(x) = e^{-\varepsilon^2 x^2} \sin b\, x \quad , \qquad x \in \mathbf{R}^1 \ .$$

Zeigen Sie:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}\, 2i\varepsilon} \left( e^{-(\xi-b)^2/2\varepsilon^2} - e^{-(\xi+b)^2/2\varepsilon^2} \right)$$

Prof. Dr. F. Natterer WS 1990/91

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 5 , Abgabe: 19.11.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 16:**
Sei $K = \{\xi \in \mathbf{R}^2 \ : \ |\xi_1| + |\xi_2| \leq b\}$.

(a) Bestimmen Sie das quadratische achsenparallele Gitter $L$ maximaler Effizienz für $K$ und geben Sie $\eta(L, K)$ an.

(b) Geben Sie ein Gitter $L$ mit $\eta(L, K) = 1$ an.

**Aufgabe 17:**
Wie Aufgabe 16, aber mit

$$K = \{\xi \in \mathbf{R}^2 \ : \ |\xi_2| \leq b \, , \ |\xi_1| \leq |\xi_2|\} \, .$$

**Aufgabe 18:**
Sei $L$ ein Gitter in $\mathbf{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) $\hat{L} = \{\xi \in \mathbf{R}^n \ : \ \frac{1}{2\pi} \, \xi \cdot x \in \mathbf{Z} \, , \quad \forall \, x \in L\}$

(b) $L$ hat die Periode $p \in \mathbf{R}^n$ (d.h. $L + p = L$) genau dann, wenn $p \in L$.

(c) Sei $n_L$ die Anzahl der Punkte von $L$ pro Einheitsvolumen. Dann ist

$$n_L n_{\hat{L}} = (2\pi)^{-n} \, .$$

**Aufgabe 19:**
Sei $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ $b$-bandbeschränkt.

(a) Zeigen Sie: Ist $h < \frac{\pi}{b}$, so gibt es eine von $x, h, f$ unabhängige Zahl $C$ mit

$$|f(x)| \leq C \max_{k \in \mathbf{Z}^n} |f(hk)| \, .$$

(b) Gilt dies auch für $h = \frac{\pi}{b}$ ?

(c) Wie lautet die Aussage (a) für ein beliebiges Gitter $L$?

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

**Übungsblatt 6 , Abgabe: 26.11.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59**

---

**Aufgabe 20:**
Sei

dft(float * x, int p, int sign)

bzw.
Procedure dft(VAR X : ARRAY OF REAL;CARDINAL p; INTEGER sign);

ein Programm für die eindimensionale diskrete Fourier-Transformation der Länge $p$, d.h. das Feld $x[0], \ldots, x[p-1]$ wird für sign = 1 mit

$$\hat{x}[k] = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi ijk/p} x[j]$$

und für sign = −1 mit

$$\tilde{x}[k] = \sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi ijk/p} x[j]$$

überschrieben. Schreiben Sie mit Hilfe von dft ein Programm

dft2(float * x, int p, int sign)

bzw.
Procedure dft2(VAR x : ARRAY[1..MAX,1..MAX] OF REAL;CARDINAL p;INTEGER sign);

zur zweidimensionalen Fourier-Transformation der Länge $p$.

**Aufgabe 21:**
Schreiben Sie unter Benutzung der Programme der Aufgabe 20 Programme

conv(float * y, float * w, float * z, int p)

bzw.
Procedure conv(VAR x,w,z : ARRAY OF REAL;CARDINAL p)
und

conv2(float ** y, float ** w, float ** z, int p)

bzw.
Procedure conv2(VAR y,w,z : ARRAY[1..MAX,1..MAX] OF REAL, CARDINAL p);

zur ein- bzw. zweidimensionalen Faltung der Länge $p$ ohne wrap-around-Fehler.

**Aufgabe 22:**
Sei $z = w * y$ eine nicht notwendig zyklische Faltung der Länge $p$ in $n$ Dimensionen. Sie

Prof. Dr. F. Natterer WS 1990/91

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 7 , Abgabe: 03.12.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 24:**
Sei $f = (f_1, \dots, f_\nu)$ ein Bild mit

$$Ef_k = \mu \, , \quad \rho(f_k, f_{k+1}) = \rho \, .$$

Sei $\hat{f}_{k+1} = \alpha f_k + \beta$ eine Schätzung für $f_{k+1}$ und $d_k = \hat{f}_k - f_k$.
Zeigen Sie:

(a) $E(d_{k+1}^2)$ ist minimal für $\alpha = \rho$, $\beta = (1 - \rho)\mu$.

(b) Sind $\alpha, \beta$ wie in a) gewählt, so sind $d_k$, $d_{k+1}$ unkorreliert.

(c) Sind $\alpha$, $\beta$ wie in a) gewählt, so ist $Ed_{k+1} = 0$.

**Aufgabe 25:**
Die Transformation $q = Uf$ mit der $(N, N)$-Matrix

$$U_{k\ell} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{k\ell\pi}{N+1} \, , \qquad k, \ell = 1, \dots, N$$

heißt Sinus-Transformation.

(a) Zeigen Sie, daß $U$ unitär ist.

(b) Zeigen Sie, daß $U$ die Karhunen–Loève- Transformation für die Kovarianzmatrix

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \rho & & & \\ \rho & 1 & \rho & & \\ & \rho & 1 & \rho & \\ & & & \ddots & \\ & & & \rho & 1 \end{pmatrix} \, , \qquad 0 \le |\rho| \le \frac{1}{2}$$

ist. Bestätigen Sie, daß $K$ positiv definit ist.

(c) Schreiben Sie mit Hilfe von dft ein Programm dst zur schnellen Sinus-Transformation.

Prof. Dr. F. Natterer WS 1990/91

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 8 , Abgabe: 10.12.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 28:**
Sei $H_p$ die Hadamard-Matrix der Ordnung $N = 2^p$ aus Aufgabe 26 (b). Zeilen und Spalten von $H_p$ seien mit den Nummern $0, \dots, N-1$ bezeichnet. Die Dualdarstellung von $i \in \{0, \dots, N-1\}$ sei $(i_{p-1}, \dots, i_0)$, also $i = i_0 + 2i_1 + \dots + 2^{p-1} i_{p-1}$ mit $i_\ell \in \{0, 1\}$.

(a) Zeigen Sie, daß $H_p$ für jedes $i \in \{0, \dots, N-1\}$ genau eine Zeile mit genau $i$ Zeichenwechseln gibt.

(b) Die Abbildung $z$ von $\{0, \dots, N-1\}$ in sich selbst sei erklärt durch

$$\begin{aligned} z_0(i) &= i_{p-1} \\ z_\ell(i) &= i_{p-\ell} + i_{p-\ell-1} \bmod (2) , \quad \ell = 1, \dots, p-1 . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß $H_p$ in Zeile $z(i)$ genau $i$ Zeichenwechsel hat.

(c) Sei $f = (f_0, \dots, f_{N-1})^T$, $g = (g_0, \dots, g_{N-1})^T$ und $g = H_p f$.
Zeigen Sie, daß

$$g_i = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{i_0 j_0 + \dots + i_{p-1} j_{p-1}} f_j , \quad i = 0, \dots, N-1 .$$

(d) Sei $H = H_p \otimes H_p$ die zweidimensionale Hadamard-Matrix,
$f = (f_{00}, f_{01}, \dots, f_{N-1,N-1})^T$,
$g = (g_{00}, g_{01}, \dots, g_{N-1,N-1})^T$
und $g = Hf$.
Wie lautet die (c) entsprechende Formel?

**Aufgabe 29:**
Sei $K$ die $(N, N)$-Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{N-2} \\ & \vdots & & & \\ \rho^{N-1} & , \dots , & & & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, daß
$$\det(K) = (1 - \rho^2)^{N-1} , \quad N = 1, 2, \dots$$

(b) Schließen Sie aus (a), daß $K$ für $|\rho| < 1$ positiv definit ist.

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 9 , Abgabe: 17.12.1990 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 30:**
Sei $\phi \in C^\infty[0,\infty)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1)
$$\int_0^\infty |\phi(s)s|ds < \infty\ , \quad \int_0^\infty \phi(s)sds \neq 0\ .$$

2) Gilt für ein integrierbares $h$ mit kompaktem Träger
$$\int_0^\infty \phi(\rho s)h(s)ds = 0\ , \quad 0 \le \rho < \infty\ ,$$
so ist $h = 0$.

Die Funktion $\phi(s) = e^{-s}$ ist ein Beispiel einer solchen Funktion. Sei $f_0$ eine radiale Funktion in $I\!R^2$ mit $|\hat{f}_0(\xi)| = \phi(|\xi|)$ und sei $F$ die Menge aller Funktionen, die durch eine affine Transformation aus $f_0$ hervorgehen.

Zeigen Sie:

(a) Sind $f, g \in F$ und ist $N_f = N_g$, so geht $f$ aus $g$ durch eine Bewegung hervor.

(b) Sind $f, g \in F$ und ist $P_f = P_g$, so geht $f$ aus $g$ durch Streckung, eventuell Spiegelung, eventuell Punktspiegelung, und eine Translation hervor.

(c) $T_f$ ist konstant auf $F$.

Hinweis: Jede $(n,n)$-Matrix $A$ läßt sich in der Form $A = UDV$ schreiben mit unitären Matrizen $U, V$ und einer Diagonalmatrix $D$ mit nichtnegativen Elementen.

**Aufgabe 31:**

(a) Sei $f \in \mathcal{S}(I\!R^2)$. Sei $(Rf)^\wedge$ die eindimensionale Fourier-Transformation von $Rf$ bezüglich des zweiten Arguments, und sei $\hat{f}$ die zweidimensionale Fourier–Transformation von $f$.

Zeigen Sie:
$$(Rf)^\wedge(\Theta, \sigma) = (2\pi)^{1/2}\hat{f}(\sigma\Theta)\ , \qquad \sigma \in I\!R^1\ , \quad \Theta \in \mathcal{S}^1\ .$$

(b) Benutzen Sie (a), um einen Algorithmus zur Suche nach Geraden in einem $N \times N$–Bild zu konstruieren, welcher mit $O(N^2 \log N)$ Operationen auskommt.

Interpolate..
geg. $f$ auf äquidistanten Gitter
ges. $f(r\Theta)$, $r \in [-1,1]$
$\varphi \in [-0,\pi]$

Prof. Dr. F. Natterer WS 1990/91

**Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG**

Übungsblatt 10 , Abgabe: 07.01.1991 , 15.00 Uhr, in den Kästen 58, 59

---

**Aufgabe 32:**
Seien $\mu_k(f)$ die zentrierten Momente von $f$.

Zeigen Sie, daß
$$\rho_2(f) = (\mu_{20}(f) - \mu_{02}(f))^2 + 4\mu_{11}^2(f)$$
invariant gegenüber Bewegungen ist.

**Aufgabe 33:**
Sei $\Gamma : x = \gamma(s),\ \ 0 \leq s \leq L$, eine zweimal stetig differenzierbare Kurve im $I\!R^2$ ohne singuläre Punkte. Der Parameter $s$ sei die Bogenlänge. Sei $\phi(s)$ der (kleinere) Winkel zwischen der Tangente an $\Gamma$ in $\gamma(s)$ und einer festen Geraden, und sei $k(s) = |\frac{d}{ds}\,\phi(s)|$ die Krümmung von $\Gamma$ in $\gamma(s)$. Sei

$$\hat{k}_\ell = \int_0^L k(s)\, e^{-2\pi i \ell s/L}\, ds\ , \qquad \ell \in Z\!\!Z$$

(a) Drücken Sie $\hat{k}_\ell$ durch $\gamma$ aus.

(b) Zeigen Sie, daß $\hat{k}_\ell$ affin invariant ist.

**Aufgabe 34:**
Für $p > 0$ gerade sei $\Gamma$ der Polygonzug mit $p$ Ecken $a_0, \ldots, a_{p-1}$, der für $p = 8$ und $p = 16$ unten abgebildet ist.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Deskriptoren $|\hat{a}_k|,\ \ k = 0, \ldots, p-1$ von $\Gamma$.

(b) Zeigen Sie: Sind $|\hat{b}_k|$ die Fourier-Deskriptoren eines weiteren Polygonzugs $\Gamma'$ mit $p$ Ecken und ist $|\hat{b}_k| = |\hat{a}_k|,\ \ k = 0, \ldots, p-1$, so liegen die Ecken von $\Gamma'$ je zur Hälfte auf zwei konzentrischen Kreisen mit Radius zwischen 1 und $r$ einschließlich. Hat einer der Kreise den Radius 1 oder $r$, so stimmen $\Gamma$ und $\Gamma'$ bis auf Rotation überein.

Prof. Dr. F. Natterer WS90/91

# NUMERISCHE BILDVERARBEITUNG

Übungsblatt 11 , Abgabe: 14.1.1991 , 15.00 Uhr

---

**Aufgabe 35:**

Sei $F = G = L_2(\mathbf{R}^n)$ und $A$ der Operator aus Aufgabe 10, d.h.

$$(Af)(x) = \int_0^{\Delta t} f(U(t)x)dt .$$

Zeigen Sie, daß $A$ stetig ist, und untersuchen Sie die Gleichung $Af = g$ auf Schlechtgestelltheit.

**Aufgabe 36:**

Sei $f$ eine radiale Funktion in $\mathbf{R}^2$, d.h. $f(x) = F(|x|)$. Sei $R$ die Radon-Transformation. Zeigen Sie:

$$(Rf)(\theta, s) = 2 \int_{|s|}^{\infty} \frac{F(u)u\, du}{\sqrt{u^2 - s^2}} .$$

**Aufgabe 37:**

Sei $f_r(x) = f(rx)$ und $R$ die Radon-Transformation.

a) Zeigen Sie:

$$Rf_r(\theta, s) = \frac{1}{r} (Rf)(\theta, sr) .$$

b) Schließen Sie aus (a): Es gibt eine Folge $(f_k)_{k=1,2,\dots}$ in $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ mit

$$\|f_k\|_{L_2(|x|<1)} = 1 , \quad \|Rf_k\|_{L_2(S^1 \times \mathbf{R}^1)} \to 0$$

für $k \to \infty$.

Aufgabe 35: Sei $F = G = L_2(\mathbb{R}^n)$ und $A$ der Operator aus Aufgabe 10, d.h.

$$(Af)(x) = \int_0^1 f(U(t)x)\,dt.$$

Zeigen Sie, daß $A$ stetig ist, und untersuchen Sie die Gleichung $Af = g$ auf Schlechtgestelltheit.

Aufgabe 36: Sei $f$ eine radiale Funktion in $\mathbb{R}^2$, d.h. $f(x) = F(|x|)$. Sei $R$ die Radon-Transformation. Zeigen Sie:

$$(Rf)(\theta, s) = 2 \int_{|s|}^{\infty} \frac{F(u)\,u\,du}{\sqrt{u^2 - s^2}}$$

Aufgabe 37: Sei $f_r(x) = f(rx)$ und $R$ die Radon-Transformation.

(a) Zeigen Sie:

$$R f_r(\theta, s) = \frac{1}{r}(Rf)(\theta, sr)$$

(b) Schließen Sie aus (a): Es gibt eine Folge $(f_k)_{k=1,2,\ldots}$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\|f_k\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = 1, \quad \|R f_k\|_{L_2(S^1 \times \mathbb{R}^1)} \to 0$$

für $k \to \infty$.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Rechenzentrum
Einsteinstraße 60

# ANTRAG AUF JOBNUMMERN FÜR PROGRAMMIERKURSE

(bitte möglichst mindestens 8 Arbeitstage
vor Kursbeginn im Dispatch abgeben)

Vorlesungsnummer : VNR = '152177',

Programmiersprache : TITEL = 'Numerische Bildverarbeitung',

Semester : SEM = 'WS 90/91',

Anzahl : ANZ = ______, Anf.-nummer : ANF = ______,

Dozent (Name) : DOZ = 'Prof. Dr. F. Natterer',

(Ben.-Kennung): DOZID = 'ONM70', ONM29

(Telefon) : DOZTEL = '3792', 3795

- Es soll benutzt werden (bitte JA oder NEIN eintragen):

  MVS = 'JA', CMS = 'JA', UNIX = '______',

- Falls CMS='JA' oder UNIX='JA': Testmaschine mit Benutzerkennung Zxy000 einrichten?

  (JA oder NEIN) TEST = 'JA',

  falls 'JA', Fachnummer: TBOX = 'M01',

- Falls CMS = 'JA': Gemeinsame D-Platte zuordnen, z.B. für Beispiele, Aufgaben usw. (falls ja, bitte Besitzer und virtuelle Adresse an dessen Maschine eintragen)?

  Ben.-Kennung (oder 'TEST'): DDINH = 'TEST',

  virt. Adresse : DDADR = '______',

- Falls CMS = 'JA': Welche Compiler-Umgebung soll vorwiegend benutzt werden (z.B. PL/I, FORTRAN, PASCAL, LISP)?

  ENV = 'C',

______________________________
(Unterschrift des Dozenten, Datum)

Die folgenden Angaben werden vom Rechenzentrum eingetragen:

Kursbuchstaben : KBU = '______',

Fächerbuchstabe(n): BUCHST = '______';

Ausgehändigt am ______________ an ____________________

Do 9-11 Sitzungszimmer

| Nr. | NAME | NEBENFACH | SEMESTER |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |
| 11 | | | |
| 12 | | | |
| 13 | | | |
| 14 | | | |
| 15 | | | |
| 16 | | | |
| 17 | | | |
| 18 | | | |
| 19 | | | |
| 20 | | | |

Fr 11-13 SR 8 BK 5 7

| Nr. | NAME | NEBENFACH | SEMESTER |
|---|---|---|---|
| 1 | Claus Kirchner | Biologie | 8 |
| 2 | Michael Brink | Physik | 9 |
| 3 | Andreas Schmidt | Astronomy | 11 |
| 4 | NORBERT SCHULTEWOLTER | INFORM. | 8 |
| 5 | Oliver Dorn | Physik | 13 |
| 6 | Birgitta Wiemann | Informatik | 5 |
| 7 | Helmut Sielschott | Physik | 5 |
| 8 | Volker Hartung | Informatik | 10 |
| 9 | [illegible] | " | 5 |
| 10 | [illegible] | " | " |
| 11 | Stefan [illegible] | " | " |
| 12 | Carsten Hoffmann | " | " |
| 13 | Carla [illegible] | BWL | " |
| 14 | | | |
| 15 | | | |
| 16 | | | |
| 17 | | | |
| 18 | | | |
| 19 | | | |

Do 17-19 SR 2 Bk 58

| Nr. | NAME | NEBENFACH | SEMESTER |
|---|---|---|---|
| 1 | Büskens, Christof | Info. | 7 |
| 2 | Heukamp, Michael | " | " |
| 3 | Schulte, Jörg | " | " |
| 4 | Ott, Gisbert | " | " |
| 5 | Oliver, Marcel | Physik | 7 |
| 6 | Ulrich Meyer | Logik | |
| 7 | Voß, Andreas | Physik | 9 |
| 8 | Meyer, Thomas | Informatik | 8 |
| 9 | Dingbert, Andrea | " | 8 |
| 10 | Haskeply, Raymond | Info | 7 |
| 11 | Spiegel, Herman | Info | 7 |
| 12 | Gunsthövel Dirk | Info | 8 |
| 13 | Siegmann, Anette | Info | 19 |
| 14 | Kemper, Peter | Info | 5 |
| 15 | Fromeut, Bernhard | Info | 5 |
| 16 | Kurasniok, Frank | Physik | 7 |
| 17 | Kruse, Martin | Physik | 7 |
| 18 | Dierkes, Thomas | Info | 5 |
| 19 | | | |

Natteren

we conclude that the sample is chemically inhomogeneous, that the $Li^-$ comes from the same source as $Na^-$, and that the mass-91 ions come from a different source than either $Na^-$ or $Li^-$. This same argument holds for several other species as well. The peaks associated with PS generally have <1% coincidence with $Na^-$ whereas those associated with NaF have >5% coincidence with $Na^-$ (Fig. 4).

For a more precise comparison between the two groups, one can also attempt to fit the experimental data to the model. Given that the sample is composed of ~0.5-μm NaF crystals on PS and that the coverage of these crystals on the PS surface is ~3%, one finds that $P_{homo}(M^-,Na^-)$, where $M^-$ is an arbitrary mass ion, is a factor of ~70 greater than $P_{in}(M^-,Na^-)$. In Fig. 4, $P_{in}(M^-,Na^-)$ is represented by the group of points associated with PS, whereas $P_{homo}(M^-,Na^-)$ is represented by the group of points associated with NaF. From the plot, one observes that $\%_{homo}(M^-,Na^-)$ is only a factor of 15 greater than $\%_{in}(M^-,Na^-)$. This factor is lower than that predicted by the model because the NaF crystals are not squares as the model assumes. As noted earlier, irregularly shaped NaF crystals lead to a longer interface between the NaF and the PS and larger values for $\%_{in}(M^-,Na^-)$ than are expected by the model. Nevertheless, the difference in the percent coincidences of more than an order of magnitude between the two groups supports the conclusion that the polystyrene is indeed spatially well separated from the NaF.

This example demonstrates the use of coincidence counting with TOF mass spectroscopy in the analysis of surfaces for chemical homogeneity at the 100-nm level. In principle, the technique should have an ultimate resolution of about 10 nm, that is, the diameter of the sample spot addressed by an individual primary ion (*9*). In practice, the resolution limit is set by the length of the interface of highly irregularly shaped inhomogeneities in the sample. The coincidence spectra may also be useful in revealing chemical relations between secondary ions and in the separation of mass spectrometric signal from background. Further, coincidence counting may be useful in examining the kinetic energy relations of secondary ions and the relation of secondary ions to secondary electrons.


REFERENCES AND NOTES

1. L. Schmidt and H. Jungclas, *Lect. Notes Phys.* **269**, 234 (1986).
2. A. Hedin, P. Hakansson, B. U. R. Sundqvist, *Int. J. Mass Spectrom. Ion Processes* **77**, 123 (1987).
3. N. Furstenau, *Z. Naturforsh.* **33a**, 563 (1978).
4. ——, W. Knippelberg, F. R. Krueger, G. Weiss, K. Wien, *ibid.* **32a**, 711 (1977).
5. R. D. Macfarlane, *Anal. Chem.* **55**, 1247A (1983).
6. L. Q. Huang, R. J. Conzemius, G. A. Junk, R. S. Houk, *Int. J. Mass Spectrom. Ion Processes* **90**, 85 (1989).
7. S. Della Negra, D. Jacquet, I. Lorthiois, Y. Le Beyec, *Int. J. Mass Spectrom. Ion Phys.* **53**, 215 (1983).
8. W. R. Summers and E. A. Schweikert, *Rev. Sci. Instrum.* **57**, 692 (1986).
9. K. Wien, *Lect. Notes Phys.* **269**, 1 (1986).
10. G. Bolbach *et al.*, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res.* **B30**, 74 (1988).
11. E. Festa and R. Sellem, *Nucl. Instrum. Methods* **188**, 99 (1981).


12. We thank C. H. Spiegelman of the Department of Statistics at Texas A&M University for consultation on the statistical models described above.

12 December 1989; accepted 4 April 1990


# Image Reconstruction of the Interior of Bodies That Diffuse Radiation


J. R. SINGER, F. ALBERTO GRÜNBAUM, PHILIP KOHN, JORGE PASSAMANI ZUBELLI



**A method for reconstructing images from projections is described. The unique aspect of the procedure is that the reconstruction of the internal structure can be carried out for objects that diffuse the incident radiation. The method may be used with photons, phonons, neutrons, and many other kinds of radiation. The procedure has applications to medical imaging, industrial imaging, and geophysical imaging.**


IN THIS REPORT WE DESCRIBE A PROcedure to determine and display images of the internal structure of objects that diffuse radiation. Such objects are members of a large class. For example, the human body diffuses infrared radiation, ultrasonic radiation, and neutrons. Almost all solids are also in this class. It is difficult to specify a substance in which diffusion along with absorption does not occur for some form of radiation.

We began studying the transmission of infrared laser beams through animal tissues. The projections of diffusely transmitted radiation could be observed by silicon detector arrays and displayed on a video screen. For tissues up to about 2 cm thick, we could observe shadowgraphs of internal structures. Thicker tissues produced fuzzier shadowgraphs until the internal structures became difficult to delineate. Conventional techniques for reconstructing multiple projections by Cormack (*1*), Hounsfield (*2*), Boyd (*3*), and others for application to computer tomography were not helpful in reconstructing our diffused projections. We did observe that considerable information about internal structures existed within these projections. This observation prompted our research into methods of reconstructing internal images of objects utilizing a large collection of shadowgraphs.

The problem was to develop a method of image reconstruction that could utilize the diffused image projections and reconstruct internal features of the diffusing object. The simplest case is a homogeneous slab with no internal structure with a particle beam directed at the face of the slab. This ideal example has been completely solved by Feynman and Hibbs (*4*). However, imaging the interior of a homogeneous body provides minimal information because there is no interior structure. In imaging more complex objects, we use the Feynman concept of summing the emergent particles over all possible paths (*5*). The resultant pattern of emergent particles will therefore contain the "history" of these paths.

To reconstruct the interior structure of an object containing inhomogeneities, we make the following assumptions:

1) Divide the object into volume elements (voxels); set the size of the voxels to be the desired resolution. (When dealing with the two-dimensional case, each element is termed a pixel.)

2) The particle beam enters the object at a series of points sequentially in time.

3) The particles of the beam may enter and leave each voxel, if not annihilated by absorption within the voxel. The absorption probability is $\nu_{ijk}$ per voxel, and the survival probability is $w_{ijk}$ per voxel, where $w_{ijk} = 1 - \nu_{ijk}$. The scattered probabilities for each voxel are $f_{ijk}$ = forward scatter probability, $b_{ijk}$ = backward scatter probability, $s_{ijk}$ = sideways scatter probability, and we assume that $b_{ijk} = 1 - 4s_{ijk} - f_{ijk}$. The probability of a forward scatter is given by $w_{ijk} \cdot f_{ijk}$; the probability of a backward scatter is $w_{ijk} \cdot b_{ijk}$; the probability of a sideways scatter is $w_{ijk} \cdot s_{ijk}$.

4) For each voxel we provide the variables $w$, $f$, $b$, and $s$. As pointed out above, these reduce to three variables.


J. R. Singer, Electrical Engineering and Computer Science, and Biophysics Departments, University of California, Berkeley, CA 94720.
F. A. Grünbaum and J. P. Zubelli, Mathematics Department, University of California, Berkeley, CA 94720.
P. Kohn, International Computer Sciences Institute, University of California, Berkeley, CA 94720.

Eigenschaften der Fourier-Transformation

$$(D^\alpha f)^\wedge = i^{|\alpha|} x^\alpha \hat{f}$$

$$(x^\alpha f)^\wedge = i^{|\alpha|} D^\alpha \hat{f}$$

$r>0$: $f_r(x) = f(r\cdot x)$.

$$\hat{f}_r(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} f(rx)\,dx \,,\; rx = x'$$

$$= (2\pi)^{-n/2} r^{-n} \int e^{-ix'\frac{\xi}{r}} f(x')\,dx' = r^{-n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{r}\right)$$

$$f_\varepsilon(x) = f(x+\varepsilon)$$

$$\hat{f}_\varepsilon = \cancel{(2\pi)^{-n/2}} \int e^{i\varepsilon\xi} \hat{f}(\xi)$$

c) $f, g \in \mathcal{S}$. $(f * g)(x) := \int f(x-y) g(y)\,dy \Rightarrow f * g \in \mathcal{S}$.

$$(f*g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} \int f(x-y)\, g(y)\,dy\,dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int g(y) \int e^{-ix\xi} f(x-y)\,dx\,dy$$

$$= \cancel{(2\pi)^{-n/2}} \int g(y)\, e^{-iy\xi} \hat{f}(\xi)\,dy$$

$$= (2\pi)^{n/2}\, \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi).$$

Satz ...: Die Fouriertransformierte und die Inverse F.T. bilden $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}$ ab, und es gilt: $(\hat{f})^\sim = f = (\check{f})^\wedge$, $f \in \mathcal{S}$.

Beweis: (i) $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{f}, \check{f} \in \mathcal{S}$.

$x^\beta D^\alpha \hat{f} = (D^\beta x^\alpha f)^\wedge$ beschränkt.

(ii) $(\hat{f})^\sim = f$.

$f, g \in \mathcal{S}$. $\int g(\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\,d\xi = \int \hat{g}(y) f(x+y)\,dy$.

Bew.: $= c \int\int g(\xi)\, f(y) e^{i\xi(x-y)}\,d\xi$

$= c \int \hat{g}(y) f(x+y)\,dy$

$$g_\varepsilon(x) = g(\varepsilon x)$$

$$\hat{g}_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \hat{g}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

$$\Rightarrow \int g_\varepsilon(\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\,d\xi = \int \hat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) f(x+y)\,dy$$

$$\Rightarrow \qquad = \int \hat{g}(y)\, f(x+\varepsilon y)\,dy$$

$g := e^{-x^2/2}$. $\Rightarrow \int e^{-\varepsilon^2|x|^2/2} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\,d\xi = \int e^{-|y|^2/2} f(x+\varepsilon y)\,dy$

majo. Kgz.: $\Rightarrow \int \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} = \int e^{-|y|^2/2}\,dy\, f(x)$

$$\Rightarrow \hat{f}^\sim = (2\pi)^{n/2} f(x) \qquad \square$$

Satz 3.2: $\min_V E\|f-f^M\|^2 = \sum_{i=M+1}^{N} \lambda_i$, Min angenommen für $V^t = V_f$.

Bem.: 1) $V$ Karhunen-Loève

2) $f^M = V_f g^m$, Spalten von $V_f$ Basisbilder.

Beisp.: 1) Diskrete Cosinustransformation

$$\frac{1}{\sqrt{2N}} e^{-\frac{\pi i k}{2N}} \sum_{\ell=-N}^{N-1} e^{-\pi i k \ell / N} f_\ell = g_k', \ f_\ell = f_{-\ell-1}, \ \ell = -1 \dots -N.$$

$$g_k' = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{\ell=-N}^{N-1} e^{-\pi i k(\ell+\frac{1}{2})/N} f_\ell = \frac{2}{\sqrt{2N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} \cos(\pi k(\ell+1/2)/N) f_\ell$$

$$\Rightarrow g_k = c_k \sum_{\ell=0}^{N-1} \cos(\pi k(\ell+1/2)/N) f_\ell, \quad c_k = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{N}}, & k>0 \\ \sqrt{\frac{1}{N}}, & k=0. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow g = Uf$, $U$ DCT.

Satz. DCT ist näherungsweise die Karhunen-Loève-Trafo für

$$K_f = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{N-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \rho^{N-1} & & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix}, \text{ das exponentielle Modell,}$$

Näherung für die Eigenwerte von $K_f$: $\lambda_k \sim \dfrac{1-\rho^2}{\frac{1}{\rho}+\rho-2\cos \pi k/N}$, $k=0 \dots N-1$.

Für $\rho > 0{,}9$ ist die Übereinstimmung der Eigenwerte gut.

2. Hadamard-Trafo: $H_N$ = Hadamard-Matrix, Ordnung $N$.

$U = N^{-1/2} H_N$ unitär.

3. Die Haar-Trafo

$N=8$:

$$H_N = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1 \\ 1&1&-1&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&-1&-1 \\ 1&-1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&-1 \end{pmatrix}, \ U_N = D H_N, \ D^{-2} = \begin{pmatrix} 8 & & & & & & & 0 \\ & 8 & & & & & & \\ & & 4 & & & & & \\ & & & 4 & & & & \\ & & & & 2 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 2 & \\ 0 & & & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

schnelle Haar-Trafo: $O(N \log N)$ (dünn besetzt)

$g := D^{-2} H_N f$.

Berechne: $f_1+f_2 \quad f_3+f_4 \quad f_5+f_6 \quad f_7+f_8$

$f_1-f_2 \quad f_3-f_4 \quad f_5-f_6 \quad f_7-f_8$ 1.

Butterfly

$f_1+f_2+\cancel{f_3+f_4}$

$f_3+f_4$

$f_5+f_6$

$f_7+f_8$

$f_1-f_2$

$f_3-f_4$

$f_5-f_6$

$n + n + n/2 + n/4 + \dots = 2n$

## §2 Stochastische Bildmodelle

1. Zufallsgrößen $\xi$ in $\mathbb{R}^1$: Experiment mit reellwertigem, zufälligen Ausgang.

$$P(x \leq \xi \leq x+\Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} p(x')\,dx'.$$

$p$ heißt (Wahrscheinlichkeits-) dichte von $\xi$, $p \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$.

Realisierung von $\xi$: Ausgang eines $\xi$-Experiments, eine reelle Zahl.

Beispiele: $\xi$ gleichverteilt in $[0,1]$, $p(x) = \delta_{x,[0,1]}$.

$\xi$ normalverteilt $(\mu, \sigma^2) \Rightarrow p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$

Histogramm: Unterteile $x$-Achse durch $(x_k)$ Für $N$ Experimente mit Realisierungen $\xi^1 \dots \xi^n$ von $\xi$

$$z_k := \frac{\#\{l : x_k \leq \xi^l < x_{k+1}\}}{N \cdot (x_{k+1} - x_k)} \approx p(x_k)$$

Erwartungswert: $E\xi = \int_{\mathbb{R}} x \cdot p(x)\,dx \sim \frac{1}{n} \sum \xi^k$

Varianz: $\sigma^2(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2 = \int (x - E(\xi))^2 p(x)\,dx$

Standardabw.: $\sigma(\xi)$

2. Zufallsgr. in $\mathbb{R}^n$:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \ \xi_i \text{ Zufallsgrößen}$$

$$p(\xi \in B) = \int_B p(x)\,dx, \quad \int_{\mathbb{R}^n} p(x)\,dx = 1, \ p \geq 0.$$

$p$ Dichte.

$$\sigma^2 = E(x^2) - E(x)^2$$

$$E(x^2) = \sigma^2 + E(x)^2$$

$$\rho + \mu^2$$

$$(f,g) = \int f\,\bar g\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat f\,\bar{\hat g}\,d\xi = \int_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n} \hat f\,\bar{\hat g}\,d\xi$$

$$= \sum_k f_k\,\overline{g_k} \cdot \left(\frac{2\pi}{h}\right)^n$$

$$= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^n \left(h^n (2\pi)^{-n/2}\right)^2 \sum_k f(hk)\,\bar g(hk).$$

Korollar: $\hat f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\,e^{-ih\xi k}$, d.h. Trapezregel exakt.

$$f_S(x) = h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\,\delta(x-hk) \qquad f_S(hk) = h^n f(hk)$$

$$= h^n f\,Ш_h \qquad f_S(x) = 0$$

Satz 4.2: $\hat f_S(\xi) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \hat f\left(\xi - \frac{2\pi}{h} l\right)$.

Bew.: $\hat f_S(\xi) = h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\,\hat\delta(\xi)\,e^{-ihk\xi}$

$$= h^n (2\pi)^{-n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\,e^{-ihk\xi}$$

Satz 3.3 $\Rightarrow$ $\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \hat f\left(\xi - \frac{2\pi l}{h}\right) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\,e^{-ik\cdot\xi h}$ $\square$.

Wie unterscheiden sich $\hat f$ und $\hat f_S$?

1) $\hat f$, $\hat f_S$ unterscheiden sich stark außerhalb $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n$.

Beh.: $\left(\hat f_S\,\chi_{h/\pi}\right)^\sim = S_h f$.

Bew.: $\left(\hat f_S\,\chi_{h/\pi}\right)^\sim = (2\pi)^{-n/2} f_S * \tilde\chi_{h/\pi} = h^{-n} f_S * \mathrm{sinc}_{\pi/h}$

Gibbs-Effekt. (hochfrequenter Fehler), Vermeidung durch "sanfte" Filter.

$$(E_h f)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(hk)\,ec\left(\frac{\pi}{h}(x-hk)\right),\quad ec(x) = \frac{\pi\cos x}{\frac{\pi^2}{4} - x^2}$$

$$(E_h f)^\wedge = \left(\hat f_S\,\eta_{h/\pi}\right)^\sim,\quad \eta_{h/\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{h}{\pi}x\right)$$

Satz 4.1 (Shannon): Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ $b$-bandbeschränkt, $h \le \frac{\pi}{b}$. Dann ist $f$ eindeutig bestimmt durch $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, und

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{h}(x - hk) = (S_h f)(x) = \text{sinc-Reihe}.$$

mit Kgz. in $L_2(\mathbb{R}^n)$. Erfüllt $g$ dieselben Vor. wie $f$, so ist

$$(f, g) = \int f \bar{g}\, dx = h^n \sum_k f(hk) \bar{g}(hk)$$

Beweis: Fourierr. in $L_2([-a, a])$: $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_k e^{i(\pi/a) x \cdot k}$.

$$\hat{f}_k = \int_{-a}^{a} f(x) e^{-i(\pi/a) x \cdot k} dx \cdot (2a)^{-n}.$$

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k e^{i(\pi/a)\xi k}, \quad f_k = (2a)^{-n} \int_{[-a,a]^n} \hat{f}(\xi) e^{-i\pi\xi k/a} d\xi$$

$\frac{\pi}{h} \ge b$, $a = \frac{\pi}{h} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k e^{ih\xi k}$.

$$f_k = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^{-n} \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} \hat{f}(\xi) e^{-ih\xi k} d\xi.$$

$$= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-ih\xi k} d\xi.$$

$$= h^{n} (2\pi)^{-n/2} \underbrace{(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-ih\xi k} d\xi}_{f(-hk)}.$$

$$= h^n (2\pi)^{-n/2}$$

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(+hk) e^{-ih\xi k} \quad (\text{in } L_2([a, +a])!)$$

$$= (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ih\xi k} \cdot \chi_{h/\pi}(\xi).$$

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \cdot \left(\chi_{h/\pi} e^{-ih\xi k}\right)^{\sim}\Big|_{\xi = x} \quad (\sim \text{stetig in } L_2)$$

$$(\operatorname{sinc}_{\pi/h})_{hk}(x) = \operatorname{sinc}_{\pi/h}(x + hk) = \operatorname{sinc} \frac{\pi}{h}(x + hk)$$

$$(\operatorname{sinc}_{\pi/h})^{\wedge}_{hk}(\xi) = e^{-ih\xi k} (\operatorname{sinc}_{\pi/h})^{\wedge}(\xi) = e^{-ih\xi k} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2} \left(\frac{h}{\pi}\right)^n \chi_{h/\pi}(\xi)$$

$$= (2\pi)^{-n/2} h^n e^{-ih\xi k} \chi_{h/\pi}(\xi)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(x - hk)\right)$$

## §5. Das Abtasttheorem von Petersen-Middleton

**Def 5.1:** Sei $W$ eine $(n,n)$-Matrix mit Elementen aus $\mathbb{R}$, $W$ invertierbar. Dann heißt $L = \{x \in \mathbb{R}^n : x = Wl,\ l \in \mathbb{Z}^n\} = W\mathbb{Z}^n$ ein (von $W$ erzeugtes) Gitter.

Beispiel: $n=2$: $W = (w_1, w_2)$. $L = \{l_1 w_1 + l_2 w_2,\ l_1, l_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Fundamentalbereich: $W([0,1[^n) = \mathbb{R}^n / L$. Volumen: $\det(L)$

**Lemma:** $L_1 = W_1 \mathbb{Z}^n$, $L_2 = W_2 \mathbb{Z}^n$, $L_1 = L_2$. $\exists\, U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, $\det U = \pm 1$, sod $W_1 = W_2 U$

Bew.: $\forall l_1\ \exists l_2 : W_1 l_1 = W_2 l_2$, $l_2 = \underbrace{W_2^{-1} W_1}_{=:U} l_1$

klar: $U$ ist ganz ($l_k = U e_k$).

ebenso: $U^{-1}$ ist ganz $\Rightarrow \det(U)^{-1} = \det(U^{-1}) \Rightarrow$

$\det U = \det U^{-1} = \pm 1$.

Folgerung: $|\det(W)| = \det(L)$ falls $L = W\mathbb{Z}$.

$\hat{L} = 2\pi W^{-t} \mathbb{Z}^n$ heißt reziprokes Gitter

Def. sinnvoll, denn: Sei $W' = WU$, $L = W\mathbb{Z}^n = W'\mathbb{Z}^n$.

$\hat{L} = 2\pi (U^{-1} W^{-1})^t \mathbb{Z}^n = 2\pi (W^{-t} \underbrace{U^{-t}) \mathbb{Z}^n}_{=\mathbb{Z}^n}$

**Satz 5.1:** (Poisson'sche Formel)

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\sum_{\eta \in \hat{L}} \hat{f}(\xi - \eta) = \det(L)(2\pi)^{-n/2} \sum_{x \in L} f(x) e^{-i\xi x}.$$

(Schon bewiesen für $L = \mathbb{Z}^n$ in 3.3)

$f_W(x) = f(Wx)$. Nach Aufgabe 7:

$\hat{f}_W(W^t \xi) = \frac{1}{|\det W|} \hat{f}(\xi)$, $W^t \xi = \xi'$:

$\hat{f}_W(\xi') = \frac{1}{|\det W|} \hat{f}(W^{-t}\xi')$

$\underset{\substack{L=\mathbb{Z}^n \\ \hat{L} = 2\pi\mathbb{Z}^n}}{\Rightarrow}$ $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_W(\xi - 2\pi k) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_W(\xi) e^{-i\xi k}$

$\Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(W^{-t}(\xi - 2\pi k)) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \det(L) \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(W\xi) e^{-i\xi k}$

$\Rightarrow \sum_{\eta \in \hat{L}} \hat{f}(\xi' - \eta) = (2\pi)^{-n/2} \det(L) \cdot \sum_{x \in L} f(x) e^{-i\xi' x}$

Satz 2.2:

Sei $f \in \mathcal{S}$, $T \in \mathcal{S}'$.

$$\widehat{f * T} = (2\pi)^{n/2} \hat{f}\,\hat{T}$$

$$\widehat{f\,T} = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{T}.$$

Beweis: Yosida. Kritisch:

$$T_x \left( \int f(x-y)\, g(y)\, dy \right) \overset{!}{=} \int T_x f(x-y)\, g(y)\, dy$$

Nyquist-Bedingung: $\mathring{K}+\eta$, $\eta\in L^\wedge$ paarweise fremd $\Leftrightarrow$ Gitterpackung von $K$.

$\eta(L,K)$ heißt Dichte der Gitterpackung.

(Erdös, P. et al.)
Lattice points, Longman, NY, 1989

Beispiel: 3) $K=\{x\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq b\}$.

4) $K=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\leq b\}$

5) $K=\Diamond$ (Aufg. 16).

Sei $\chi$ die char. Fkt. des Einheitsquadrats.

$\hat{f}(\xi)=c\cdot\operatorname{sinc}\xi=c\,\frac{\sin\xi_1}{\xi_1}\cdot\frac{\sin\xi_2}{\xi_2}$.

Hyperbeln sind Linien gleicher Höhe:

 ✓

| $n$ | $\eta_{cart}$ | $\eta_{eff}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0,785 | 0,907 |
| 3 | $\frac{\pi}{6}=0{,}524$ | 0,742 |
| 4 | 0,308 | 0,617 |
| 5 | 0,165 | 0,466 |
| 6 | 0,081 | 0,373 |
| 7 | 0,037 | 0,295 |
| 8 | 0,005 | 0,081 |

Verallgemeinerte sinc-Reihe für bel. Gitter:

$\chi_K(x)=$ char. Fkt. von $K$.

$$\operatorname{sinc}_{L,K}=\det(L)\,(2\pi)^{-n/2}\,\tilde{\chi}_K$$

$$S_{L,K}(x)=\sum_{y\in L}f(y)\operatorname{sinc}_{L,K}(x-y)$$

$$(S_{L,K}f)^\wedge(\xi)=\sum_{y\in L}f(y)e^{-iy\xi}\det(L)\,(2\pi)^{-n/2}\chi_K(\xi)$$

$$=\chi_K(\xi)\sum_{\eta\in L^\wedge}\hat{f}(\xi-\eta)=(\hat{f}_L\chi_K)(\xi)$$

$$\Rightarrow (S_{L,K}f)^\wedge=\hat{f}_L\chi_K$$

Satz 5.4: Sei $f\in\mathcal{S}$. $L$ erfülle die Nyquist-Bed. bzgl. $K$. Dann gilt

$$|(S_{L,K}f-f)(x)|\leq 2\,(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n/K}|\hat{f}(\xi)|\,d\xi$$

Beweis: $(S_{L,K}f)^\wedge(\xi)=(\hat{f}_L\chi_K)(\xi)=\chi_K(\xi)\sum_{\eta\in L^\wedge}\hat{f}(\xi-\eta)$

$$=\chi_K(\xi)\hat{f}(\xi)+\chi_K(\xi)\sum_{\substack{\eta\in L^\wedge\\ \eta\neq 0}}\hat{f}(\xi-\eta).$$

$$(S_{L,K}f-f)^\wedge(\xi)=(\chi_K(\xi)-1)\hat{f}(\xi)+\chi_K(\xi)\sum_{\substack{\eta\in L^\wedge\\ \eta\neq 0}}\hat{f}(\xi-\eta).$$

$$\Rightarrow (S_{L,K}f-f)(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\xi}\Big((\chi_K-1)\hat{f}+\chi_K\sum_{\substack{\eta\in L^\wedge\\ \eta\neq 0}}\hat{f}(\xi-\eta)\Big)d\xi.$$

$$|\cdot|\leq(2\pi)^{-n/2}\Big(\int_{\mathbb{R}^n/K}|\hat{f}(\xi)|\,d\xi+\int_K\Big|\sum_{\substack{\eta\in L^\wedge\\ \eta\neq 0}}\hat{f}(\xi-\eta)\Big|\,d\xi$$

$$\leq |\cdot|+\sum_{\substack{\eta\in L^\wedge\\ \eta\neq 0}}\int_{K-\eta}|\hat{f}(\xi')|\,d\xi' \qquad |\cdot|\leq\int|\hat{f}(\xi')|\,d\xi'$$

Satz 5.5 Sei $f, g \in S$. $f \overset{L}{*} g(x) := \det(L) \sum_{y \in L} f(x-y) g(y)$. Dann gilt
$$\left(f \overset{L}{*} g - f * g\right)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \sum_{\substack{\eta \in L' \\ \eta \neq 0}} \hat{g}(\xi - \eta).$$

Beweis:
$$\left(f \overset{L}{*} g\right)^\wedge(\xi) = \cancel{(2\pi)^{-n/2}} \det L \sum_{y \in L} e^{-iy\xi} \hat{f}(\xi) g(y)$$
$$= \hat{f}(\xi) \sum_{\eta \in L'} \hat{g}(\xi - \eta) \cdot (2\pi)^{n/2}$$
$$= \underbrace{(2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)}_{(f * g)^\wedge(\xi)} + (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \sum_{\substack{\eta \in L' \\ \eta \neq 0}} \hat{g}(\xi - \eta)$$

---

§6. Die Fourier-Transformation (diskret)

$$\left.\begin{aligned} \hat{y}_k &= p^{-n} \sum_{0 \le j < p} e^{-2\pi i jk/p} y_j \\ \tilde{y}_k &= \sum_{0 \le j < p} e^{2\pi i jk/p} y_j \end{aligned}\right\} \text{n-dimensionale diskrete FT der Länge } p$$

$n=2$: FFT, Separabilität, $O(n \log n)$, $O(p^n \log p)$ Komplexität.

Diskrete Faltung; zyklische Faltung:

$z_k = \sum_{0 \le l < p} w_{k-l} y_l$, $w_{k+p} = w_k$. (Wrap-around-Fehler)

$z = w * y$. $(w * y)^\wedge = p^n \hat{w} \cdot \hat{y}$

$w'_k = w_k$
$w'_{k+p} = 0$

c) Nicht-kausaler Fall:

Beispiel: $f_k = \alpha(f_{k_1+1,k_2} + f_{k_1-1,k_2} + f_{k_1,k_2-1} + f_{k_1,k_2+1}) + d_{k_1,k_2}$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + af \sim \left(\frac{4}{h^2}+1\right)\left(f_k - \alpha\left(f_{k_1+1,k_2} + \ldots\right)\right) \left\{ \alpha = \frac{1}{4+ah^2}\right.$$

Randwertproblem

Praktische Anwendung: Blocking, Tiling (Aufteilen in viele kleine Fliesen)

§4 Bildanalyse

Sei $f$ Bild, $g$ Objekt (= Bild). Kommt $g$ in $f$ vor?

1. $g$ = Punkt: $d_k = f_k - \frac{1}{p}\sum_{l\in N_k} f_l$, $N_k$ benachbarte Pixel, $(k \notin N_k)$, $p = |N_k|$.

$k$ Punkt $\Leftrightarrow |d_k| \geq d$.

2. $g$ = Gerade:

Radon (Hough-) Trafo: $\Theta = \binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$. $x\cdot\Theta = s$ Integrationsgerade. $(\Theta,s) = (-\Theta,-s)$.

$$(Rf)(\Theta,s) = \int_{x\cdot\Theta=s} f(x)\,dx = \int_{t\in\mathbb{R}} f(s\Theta + t\cdot\Theta^\perp)$$

Geraden in $f \mathrel{\hat{=}}$ Punkte in $(Rf)$. Berechnung von $Rf$: Annahme $f = c$ in jedem Pixel,

$$Rf(\Theta,s) = \sum_l |L(\Theta,s) \cap \text{Pixel}_l| \cdot f(l)$$

$s = h\cdot l$. Heuristisch: Wähle $\Delta\varphi$ so klein, daß das größte auflösbare Objekt erkannt wird, $r\cdot\sin\Delta\varphi \sim \underset{\text{Bildgröße}}{r}\cdot\Delta\varphi = h$. $\Theta = \binom{\cos\varphi_j}{\sin\varphi_j}$, $\varphi_j = j\cdot\Delta\varphi$, $\mathcal{O}(N^3)$ Operationen.

(s. Aufgabe 31 b).

3. $g$ = beliebig.

(a) Sind $f, g$ identisch bis auf Translation?

$\hat{f}_a(\xi) = e^{i\xi a}\hat{f}(\xi)$. $|\hat{f}_a(\xi)| = |\hat{f}(\xi)|$

Falls ja, so gilt $|\hat{f}| = |\hat{g}|$.

(b) Gehen $f, g$ durch Bewegungen auseinander hervor?

$N_f(\rho) = \int_{S^1} |\hat{f}(\rho\omega)|\,d\omega$, $S^1$ = Einheitssphäre in $\mathbb{R}^2$, ist rotationsinvariant.

Falls ja, $N_f = N_g$.

(c) Geht $f$ aus $g$ durch Streckung hervor?

$f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. $\hat{f}_r(\xi) = r^{-2}\hat{f}(\xi/r)$

$P_f(\omega) = \int_0^\infty |\hat{f}(\rho\omega)|\rho\,d\rho$, $\omega\in S^1$. $P_{f_r}(\omega) = \int_0^\infty |\hat{f}_r(\rho\omega)|\rho\,d\rho$

$= r^{-2}\int_0^\infty |\hat{f}(\frac{\rho}{r}\omega)|\rho\,d\rho = r^{-2}r^2\int_0^\infty \hat{f}(\rho\omega)\rho\,d\rho = P_f(\omega)$.

$U \Lambda U^+ f = d + b \Rightarrow U^+ f = \Lambda^{-1} U^+ (d+b) =: g \,;\, f = Ug$.

Sei $h$ der Pixelabstand. $\left(\frac{1}{\alpha h^2} Tf\right)_k = \underbrace{\frac{1}{h^2}\left(-f_{k-1} + 2f_k - f_{k+1}\right)}_{= -f''(kh)} + \frac{1}{h^2}\left(1/\alpha - 2\right) f_k$

$\Rightarrow Tf = d + b \Leftrightarrow -f'' + qf = d$ bei geg. Anfangswerten $f(0) = f_0$, $f(N) = f_N$

(Jain 1978), Stochastische Operator.

RCB in 2D:

$k = \binom{k_1}{k_2}$ $\hat{f}_k = \sum_{l \neq 0} \alpha_l f_{k+l}$, $f_k = \hat{f}_k + d_k$, $\alpha_l$ fest.

kausaler Fall: $f$ bekannt auf unteren und linken Rand, $\alpha_l = 0 \; \forall l_1 > 0 \vee l_2 > 0$.

$\alpha_{l_1, 0_2} = 0$ für $l_2 > 0$:

Differenzenstern für $(v_{t,xx})$, man braucht $f$ auf rechten Rand, semikausal.

nichtkausal: $\square$ mit $\cdot\dot{\underset{\cdot}{o}}\cdot$, volle Matrixauflösung.

a) Der Kausale Fall

Codierung: $f \to \begin{cases} f_k - \sum_{l \neq 0} \alpha_l f_{k+l} =: d_k; & k_1 \wedge k_2 > 0 \\ f_k =: d_k, & k_1 \vee k_2 = 0 \end{cases}$

Rekonstruktion: $f_k = \sum_{l \neq 0} \alpha_l f_{k+l} + d_k$ $k_1, k_2 > 0$; $f_k$ bekannt für $k_1 = 0 \vee k_2 = 0$.

Beispiel: $f_k = \alpha\left(f_{k_1, k_2 - 1} + f_{k_1 - 1, k_2}\right) - \beta f_{k_1 - 1, k_2 - 1} + d_k$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + a\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + bf \sim \left(\frac{1}{h^2} + \frac{2a}{h} + b\right)\left(f_{k_1,k_2} - \alpha\left(f_{k_1,k_2-1} + f_{k_1-1,k_2}\right) + \beta f_{k_1-1,k_2-1}\right)$$

falls $\alpha = \frac{1/h^2 + a/h}{1/h^2 + 2a/h + b}$, $\beta = \frac{1}{h^2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{2a}{h} + b\right)}$

$= \left(1/h^2 + 2a/h + b\right) d$

Hyperbolische DGL, Anfangswertproblem.

Andere Formulierung: Gegeben sei eine DGL mit Parametern. Finde eine Diskretisierung, die auf das Bild angewandt 0 ist.

b) Semi-kausal: $f_{k_1,k_2} = \alpha\left(f_{k_1-1,k_2} + f_{k_1+1,k_2}\right) + \beta f_{k_1,k_2-1} + d_k$.

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + a\frac{\partial f}{\partial x_2} + bf \doteq \left(\frac{2}{h^2} + \frac{a}{h} + b\right) d, \text{ falls } \alpha = \frac{h^2}{2 + ha + h^2 b}, \; \beta = \frac{a}{\frac{2}{h} + a + hb}$$

Parabolische DGL. Anfangsrandwertaufgabe.

Beisp. 1 (Einschub): $B = (2\pi)^{n/2} \delta$, $\hat{B} = 1$, $\hat{w} = \frac{1}{1+|\frac{\sigma}{f}|^2} \sim \frac{1}{1+\sigma^2|\xi|^{2\beta}}$, Butterworth.

Probleme bei Nullstellen!

3) $B(x) = c\, e^{-\frac{1}{2}(x/r)^2}$, $r$ blur spread parameter. (eigentlich: $e^{-\lambda|x|^{5/3}}$)

$\hat{B}(\xi) = c' e^{-1/2(\xi r)^2}$

4) Aufg. 9:  $\hat{B}(\xi) = c\, e^{i\Delta t\, v\cdot\xi/2} \operatorname{sinc}(\Delta t\cdot v\cdot \xi/2)$

$\hat{B}(\xi) = 0 \Leftrightarrow \Delta t\, v\cdot\xi/2 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $\frac{v}{|v|}\cdot\xi = \frac{2k\pi}{\Delta t |v|} = \frac{2k\pi}{\Delta s}$

Problem: $\hat{g} = \hat{B}\cdot\hat{f}$, $\hat{f}$ ist nicht berechenbar falls $\hat{B} = 0$!

$e^{ix\xi} = e^{is\frac{v}{|v|}\cdot\xi} = e^{is\frac{2k\pi}{\Delta s}}$ ist periodisch, $x = s\cdot\frac{v}{|v|}$, mit Periode $\Delta s$.

(Da beim Fotografieren über eine $\Delta s$-Periode integriert wird, ist der Koeffizient 0!

5) Aufg. 10:  $f(x) = \sum_k f_k(r) e^{ik\varphi}$, $x = r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$, $g(x) = \int_0^{\Delta t} f(U(t)x)\,dt$,

$U(t) = \begin{pmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}$, $g_k = \frac{1}{ik\omega}\left(e^{ik\omega\Delta t} - 1\right) f_k$.

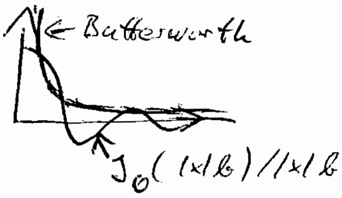
Falls $k = \frac{2\pi p}{\Delta t}$: $f_k = 0$ durch Wiener-Filter, $e^{ik\varphi} = e^{\frac{2\pi i p}{\omega\Delta t}\varphi}$, Periode $\omega\Delta t$.

Butterworth:

$$H(\xi) = \frac{1}{1+\left(\frac{|\xi|}{b}\right)^{2m}}, \quad \hat{H}(x) \overset{\text{Aufg. 7}}{=} \int_0^\infty r \cdot J_0(r|x|) \frac{dr}{1+\left(\frac{r}{b}\right)^{2m}}$$

Abramowitz: $m=1$ $\qquad = K_0(|x|)$, $K_0$ mod. Bessel-Funktion (Knabel-Nicholson)

$$\Rightarrow K_0(r) \sim \begin{cases} \ln(r), & r \to 0 \\ e^{-r}, & r \to \infty \end{cases}$$




Bildrestauration

$$g = 2\pi^{-n/2} B * f + n, \quad \hat{g} = \hat{B}\hat{f} + \hat{n}, \quad \hat{f} = \frac{\hat{g}-\hat{n}}{\hat{B}}$$ ist Unsinn!! (kleine Freq. in $\hat{n}$ werden verstärkt)

Wiener-Filter $W$, $f_R = \hat{W} g$. (nach N. Wiener)

$$(\hat{f}_R - \hat{f}) = \hat{W}(\hat{B}\hat{f} + \hat{n}) - \hat{f} = (\hat{W}\hat{B} - 1)\hat{f} + \hat{W}\hat{n}$$

$$|\hat{f}_R - \hat{f}|^2 \leq 2\left(|\hat{W}\hat{B} - 1|\,|\hat{f}|^2 + |\hat{W}\hat{n}|\right)$$

$\hookrightarrow = E|\hat{f}_R - \hat{f}|^2$ für weißes Rauschen

Lemma: $F(w) = |w-z|^2 + \omega|w|^2$, $w \in \mathbb{C}$. $\min\limits_{\omega \geq 0} F(w) = \frac{\omega}{1+\omega}|z|^2$ wird angenommen für $z = \frac{1}{\omega}$.

Beweis: $w = u+iv$, $z = x+iy$ $\square$.

Anwendung auf $F(\hat{w}) = |\hat{w} - \hat{B}^{-1}|^2 + \left|\frac{\hat{n}}{\hat{B}\hat{f}}\right|^2 |\hat{w}|^2$: $F(\hat{w})$ wird minimiert für

$$\hat{w} = \frac{1}{1+\left|\frac{\hat{n}}{\hat{B}\hat{f}}\right|^2}(\hat{B})^{-1} = \frac{|\hat{B}|^2}{|\hat{B}|^2 + \left|\frac{\hat{n}}{\hat{f}}\right|^2}\hat{B}^{-1} = \frac{\overline{\hat{B}}}{|\hat{B}|^2 + \left|\frac{\hat{n}}{\hat{f}}\right|^2}$$

$$|\hat{f}_R - \hat{f}|^2 \leq 2|\hat{B}\hat{f}|^2 F(\hat{w}) = 2\frac{|\hat{n}|^2}{1+\left|\frac{\hat{n}}{\hat{B}\hat{f}}\right|^2}|\hat{B}^{-1}|^2 = 2\frac{\left|\frac{\hat{n}}{\hat{B}\hat{f}}\right|^2}{1+\left|\frac{\hat{n}}{\hat{B}\hat{f}}\right|^2}|\hat{f}|^2$$

$\frac{|\hat{B}\hat{f}|}{|\hat{n}|}$ heißt Signal-Rausch-Verhältnis. (versch. Def. in Literatur)

stochastisch: Weißes Rauschen, unkorreliert, $E\, n(x)n(x-y) = \sigma^2\delta(y)$

$$\frac{1}{N}\sum E\, n(x_k) n(x_k - y) \sim \sigma^2 \delta(y) \qquad \int n(x)n(x-y) = \sigma^2\delta(y)$$

$$\Rightarrow n * \check{n} = \sigma^2\delta \Rightarrow \hat{n}\,\overline{\hat{n}} = c\sigma^2 \cdot 1, \quad |\hat{n}| = \text{konstant}.$$ Suche $\hat{n}$ als Distribution.

2) $$B(x) = \begin{cases} 1/\pi r^2, & |x| \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad \hat{B}(\xi) = c\frac{J_1(|\xi|\cdot r)}{|\xi|\cdot r} \sim c|\xi|^{-3/2}$$

$$\hat{w}(\xi) = \frac{|\hat{B}|^2}{|\hat{B}|^2 + \left|\frac{\hat{n}}{b}\right|^2}\hat{B}^{-1} = \frac{\hat{B}^*}{|\hat{B}|^2 + \left|\frac{\hat{n}}{b}\right|^2} = 0 \text{ für } \hat{B}(\xi) = 0.$$

# Teil II. Bildverarbeitung

## §1. Das menschliche Auge

Ziel: Mathem. Beschreibung des Sehvorgangs: Einfarbige, unbewegliche Bilder

$I(x) :=$ Intensität des Bildes im Punkt $x \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\text{Strahlungsenergie}}{\text{Zeiteinheit} \cdot \text{Flächeneinheit}}$

$x = (x_1, x_2)$, Winkelgraden: $x_e$ $\}\,4^\circ$, $4^\circ$. In 30 cm Entfernung: $30\,\text{cm} \cdot \sin 4^\circ = 2\,\text{cm} = x_e$

7 Stufen:

$$I(x) \xrightarrow[\text{Linse, Tiefpaß}]{} I_F(x) \xrightarrow[\text{Sampling}]{} Ш_h I_F \xrightarrow[\text{Logarithmieren}]{} \ln Ш_h I_F \xrightarrow[\text{Bandpaß}]{} z_k \xrightarrow[\text{Kontrastverstärkung}]{} v_k \xrightarrow[\text{Integration}]{} r_k \xrightarrow[\text{Diskretisierung}]{} \delta_k$$

Sampling: $Ш_h I_F(x)$

1. $\hat{I}_F(\xi) = \begin{cases} \hat{I}(\xi), & |\xi| \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ . (Tiefpaß)

   $b \approx 400 \approx 60$ Zyklen/°.

2. Stufe: Sampling, $h = \frac{1}{120}{}^\circ$. $\frac{\pi}{b} = \frac{1}{128} < h$ (wenn auch knapp)

3. Stufe: Übergang zum Logarithmus:

$$z = \ln Ш I_F = \ln(I_0 + I_F - I_0) = \underbrace{\ln I_0}_{\text{Hintergrund, fest!}} + \frac{I_F - I_0}{I_0} + \dots$$

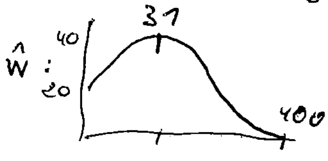
Empfindlichkeit $\frac{I_F - I_0}{I_0} \approx 0{,}02$

Intensitätsbereich: $1 \,..\, 10^4$

4. Trennung der Frequenzen: $\hat{z}_k(\xi) = \begin{cases} \hat{z}(\xi), & \big||\xi| - \rho_k\big| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (Bandpaß)

   $a \sim 16$, $k \sim 1 \,..\, 12$.

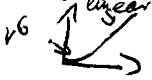
5. Kontrastverstärkung: $v_k = w_k \cdot z_k$, also $\hat{v} = \hat{w} \cdot \hat{z}$, $\hat{w}(\xi) = w_k$.




Max $\cong$ 5 Zyklen/Grad

Bei 30 cm: 1 Zyklus/mm $\cong$

6. In jedem der 12 Kanäle wird $r_k = \int g(v_k)\,dx$ gebildet, $g$ nichtlinear.




7. Diskretisierung: Maximumbildung, $\delta = ?(|\mathrm{Max}| \geq \varepsilon)$ $\cancel{\mathrm{Max}}$: $0$.

8. Kontrastverschärfung durch laterale Inhibition: benachbarte Neuronen feuern negativ!

## Mallat

$L_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\,1 & & 0 \\ & 1\,1 & \\ 0 & & \ddots\ 1\,1 \end{pmatrix} \quad H_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\,-1 & & 0 \\ & 1\,-1 & \\ 0 & & \ddots\ 1\,-1 \end{pmatrix}$

$L_3' = 2L_3^t$. $H_3' = 2H_3^t$.

$L_s \cdot L_s' = I_{2^{s-1}}$. $H_s \cdot H_s' = I_{2^{s-1}}$. $H_3' H_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \; \ddots \end{pmatrix}$, $L_s' L_s = \begin{pmatrix} 1\,1 & & \\ 1\,1 & & \\ & 1\,1 & \\ & 1\,1 & \ddots \end{pmatrix}$,

$H_3' H_3 + L_3' L_3 = I_{2^3}$.

Codierung: $f^p = f$. $f^{s-1} = L_s f^s$, $g^{s-1} = H_s f^s$, $s = p \ldots 1$. Resultat: $f^0, g^0, g^1, \ldots g^{p-1}$
$\qquad\qquad 1 \; 1 \; 2 \; 2^{p-1}$, $\Sigma = 2^p = n$.

$f^s = (H_s' H_s + L_s' L_s) f^s = H_s' g^{s-1} + L_s' f^{s-1}$, $s = 1 \ldots p$.

$f = f^p \xrightarrow{L} f^{p-1} \xrightarrow{L} \ldots f^1 \xrightarrow{L} f^0$;
$f^p \xrightarrow{H} g^{p-1}$, $f^{p-1} \xrightarrow{H} g^{p-2}$, $f^1 \xrightarrow{H} g^0$

$f^0 \xrightarrow{L'} f^1 \xrightarrow{L'} f^2 \ldots \to f^p = f$.
$g^0 \xrightarrow{H'}$, $g^1 \xrightarrow{H'}$

$$d^s = f^s - L_s' f^{s-1} = f^s - L_s' L_s f^s = (I - L_s' L_s) f^s.$$

$L_k$: Smooth / Blurring / Restriktion
$L_k'$: Erweiterungen.

$d^3 = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(f_1+f_2) & 2\times \\ \frac{1}{2}(f_3+f_4) & 2\times \\ \vdots & \end{pmatrix}$ Idee der Codierung: Übertrage nicht absolute Werte, sondern Differenzen zu gewissen Mittelwerten (Details der Stufe p werden übertragen), Ähnlich FT: Zerlegung eines Bildes in Stufen, auf denen gewisse Details übertragen werden. Unterschied: Haartrafo ist lokal!

## Rekursive Block-Codierung

Ausgangspunkt: DPCM. $f = (f_0 \ldots f_N)^t$, $E f_k = \mu$, $\sigma^2(f_k) = \sigma^2$, $\rho_{kl} = \rho^{|k-l|}$, $k, l = 0, 1 \ldots N$.
$\hat{f}_k = \rho f_{k-1} + (1-\rho)\mu$, $d_k = f_k - \hat{f}_k$; $E d_k^2 = \sigma^2(1-\rho^2)$.

besser: $\hat{f}_k = \alpha f_{k-1} + \beta f_{k+1} + \gamma$. Bestimme $\alpha, \beta, \gamma$ optimal ($E d_k^2$ minimal).

$E\mu = 0$, $\gamma = 0$, $\hat{f}_k = \alpha(f_{k-1} + f_{k+1})$ $E d_k^2 = \sigma^2(1 + 2\alpha^2 - 2\alpha\rho + 2\alpha^2\rho^2) = 0$

$\frac{\partial}{\partial\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\rho}{1+\rho^2}$, $E(d_k^2) = \sigma^2 \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}$.

$f_k = \alpha(f_{k+1} + f_{k-1}) + d_k$, $k = 1 \ldots N-1$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & & \\ -\alpha & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & -\alpha \\ & & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$.
$Tf = d + b$. $b = \alpha\begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \}\, N-1$.
Rekonstruktion: Geg. $d, b$. Löse $Tf = d + b$. $O(n)$.
Alternativ: $U^t T U = \Lambda$, $U$ sinus-Trafo, EW $1 + 2\alpha\cos\frac{k\pi}{N}$ $k = 1 \ldots N-1$.

$(\widehat{Rf})(\theta,\sigma) = (2\pi)^{1/2}\,\hat{f}(\sigma\cdot\theta) \Rightarrow R$ injektiv, denn $Rf=0 \Rightarrow \widehat{Rf}=0 \Rightarrow \hat{f}=0 \Rightarrow f=0$ $\square$,

aber nicht surjektiv, denn: $Rf = g \Rightarrow g(\theta,s) = g(-\theta,-s)$.

$$\int s^m g(\theta,s)\,ds = \int_{\mathbb{R}} s^m \underset{\mathbb{R}}{R}f(\theta,s)\,ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}} s^m \int_{\mathbb{R}} f(s\cdot\theta + t\cdot\theta^\perp)\,dt \quad \left(\begin{smallmatrix} s = x\cdot\theta \\ t = x\cdot\theta^\perp\end{smallmatrix}\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,(x\cdot\theta)^m\,dx$$

$= Q_m(\theta)$, Polynom vom Grad $m$ in $\theta$

$Ш_L f = \sum_{x\in L} f(x)$, $f_L = \det(L)\cdot f\cdot Ш_L$.

Poisson mit $\xi = 0$:

$$\sum_{\eta\in L^\wedge} \hat f(\eta) = \det(L)\cdot(2\pi)^{-n/2}\sum_{x\in L} f(x),$$

d.h. $Ш_{L^\wedge}\hat f = \det(L)\,(2\pi)^{-n/2}\,Ш_L f$

$\Leftrightarrow (Ш_{L^\wedge})^\wedge \doteq \det(L)(2\pi)^{-n/2}Ш_L$.

Satz 5.2: $f\in\mathcal S(\mathbb R^n)$. Dann gilt:

$$(f_L)^\wedge(\xi) = \sum_{\eta\in L^\wedge}\hat f(\xi-\eta).$$

Beweis: $(f_L)^\wedge = \det(L)\,(f\,Ш_L)^\wedge = \det(L)(2\pi)^{-n/2}\,\hat{Ш}_L * \hat f$

$$(f_L)^\wedge(\xi) = Ш_{L^\wedge}\check{\hat f}_{-\xi} = \sum_{\eta\in L}\check{\hat f}(\eta-\xi) = \sum_{\eta\in L^\wedge}\hat f(\xi-\eta). \text{ (nach 2.2)}$$

Satz 5.3 (Abtasttheorem von Petersen-Middleton).

Sei $f\in L_2(\mathbb R^n)$. $\hat f(\xi) = 0$ außerhalb einer Menge $K\subseteq\mathbb R^n$, $\mathring K+\eta$, $\eta\in L^\wedge$ seien ~~paarweise~~ ~~verschieden~~ disjunkt. Dann ist $f$ eindeutig bestimmt durch seine Werte auf $L$.

Beweis:

Sei $f\in\mathcal S(\mathbb R^n)$. $\hat f = (f_L)^\wedge$ in $K$.

$= 0$ außerhalb von $K$.

Sei $f\in L_2(\mathbb R^n)$: wie bei Shannon.

Beispiel: 1) $K=[-b,b]^n$, $L = h\mathbb Z^n$, $h = \frac{\pi}{b}$.

$L^\wedge = \frac{2\pi}{h}\mathbb Z^n = \frac{2\pi b}{\pi}\mathbb Z^n = 2b\mathbb Z^n$.

2) $K = \{x\in\mathbb R^n : |x|\le b\}$, $L$ wie oben.

3) $K$ wie in 2), $L$ so daß:

$2\pi W^{-t} = (v_1, v_2)$. $v_1 = (0, 2b)$, $v_2 = \begin{pmatrix}\sqrt3\, b\\ b\end{pmatrix}$. $2\pi W^{-t} = \begin{pmatrix}0 & \sqrt3\\ 2 & 1\end{pmatrix} b$

$$W = \frac{\pi}{b}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3} & \frac{2}{\sqrt3}\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

## §3. Effiziente Codierung von Bildern (Datenreduktion)

$f = (f_1 .. f_N)^t$

Gesucht g: 1) f aus g rekonstruierbar

2) Übertragung von g einfacher als von f.

1) runs, $(k, l, f_k)$

2) DPCM, differential pulse code modulation

Annahmen: $f_1 .. f_N$ Zufallsgrößen.

$$E f_k = \mu, \ \rho = \rho(f_k, f_{k+1}), \ \sigma = \sigma(f_k), \ k = 1..N.$$

Schätzung für $f_{k+1}$: $\hat{f}_{k+1} = \rho f_k + (1-\rho)\mu$

übertrage $d_{k+1} = f_{k+1} - \hat{f}_{k+1}$.

$$E\, d_{k+1}^2 = E(f_{k+1} - \rho f_k - (1-\rho)\mu)^2 = E(f_{k+1} - \mu - \rho(f_k - \mu))^2$$

$$= E(f_{k+1} - \mu)^2 + \rho^2 E(f_k - \mu)^2 - 2\rho\, \underbrace{E(f_{k+1} - \mu)(f_k - \mu)}_{= \rho(f_k, f_{k+1}) \cdot \sigma^2}$$

$$= \sigma^2 + \rho^2 \sigma^2 - 2\rho^2 \sigma^2$$

$$= \sigma^2 (1 - \rho^2)$$

$$E\, d_{k+1} = E(f_{k+1} - \rho f_k - (1-\rho)\mu) = \mu - \rho\mu - (1-\rho)\mu = 0$$

$$\frac{\sigma^2(d_{k+1})}{\sigma^2(f_{k+1})} = 1 - \rho^2; \quad \frac{\sigma(d_{k+1})}{\sigma(f_{k+1})} = \sqrt{1-\rho^2} \quad (\rho = 0{,}9;\ \sqrt{1-\rho^2} \sim 0{,}5)$$

3) Transformationsmethoden:

$U$ unitäre $(N, N)$-Matrix, $g = Uf$, $g^M = \begin{cases} g_k, & k = 1..M \\ b_k, & k = M+1..N \end{cases}$, $b_k$ fest.

$f^M = U^t g^M$ ist Rekonstruktion.

3.1: Sei $f = (f_1 .. f_N)^T$ ein Bild mit $Ef = \mu$, Korrelationsmatrix $K_f$.

Sei $b = U\mu$. Dann gilt:

$$E \| f - f_M \|_2 = \sum_{i=M+1}^{N} v_i^t K_f v_i, \quad U = \begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_N^t \end{pmatrix}.$$

Bew.: $f - f^M = f - U^t g^M = U^t U f - U^t g^M = U^t (g - g^M)$

$$= \sum_{i=M+1}^{N} (g_i - b_i)\, \mathbf{v}_i$$

$$\| f - f^M \|^2 = \sum_{i=M+1}^{N} (g_i - b_i)^2, \quad b_i = v_i^t \mu, \ g_i = v_i^t f$$

$$\|f - f_M\|^2 = \sum_{i=M+1}^{N} v_i^t \underbrace{(\mu - f)(\mu - f)^t}_{\text{Dyadisches Produkt}} v_i$$

$$E\,\|f - f_M\|^2 = \sum_{i=M+1}^{N} v_i^t \big(\underbrace{E\,(\mu-f)(\mu-f)^t}_{=\text{Kovarianzmatrix } K_f}\big) v_i$$

Satz 3.2: Sei $f$ wie in 3.1. Sei $V_f = (v_1 .. v_N)$ die Matrix der orthonormalen Eigenvektoren der Kovarianzmatrix $K_f$, und seien $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq .. \geq \lambda_N$ die zugehörigen Eigenwerte. Dann ist

$$\min_{U^tU=I} E\,\|f - f^M\|^2 = \lambda_{M+1} + \dots + \lambda_N$$

Das Minimum wird für $U = V_f$ angenommen.

Bemerkung: Die durch $V_f$ erzeugte unitäre Trafo heißt die Karhunen-Loève-Trafo (oder Hotelling-Trafo) zu $K_f$.

a) $M = 0$.

$$\min_{U^tU=I} \sum_{i=1}^{N} U_i^t K_f U^i = \min_{U^tU=I} \operatorname{Spur}(U K_f U^t) = \operatorname{Spur}(K_f) = \lambda_1 + \dots + \lambda_N$$

(b) $0 < M < N$

Lagrange'sche Multiplikatoren: $\min F(x)$ unter $g_i(x) = 0$, $i = 1..p$.

Notwendige Bedingung: $\exists \beta_1 .. \beta_p$: $F(x) - \sum_{i=1}^{p} \beta_i g_i(x)$ stationär, bzw. sämtliche partielle Ableitungen nach $x$ verschwinden.

Anwendung: $\sum_{i=M+1}^{N} v_i^t K_f v_i - \sum_{ik=M+1}^{N} \beta_{ik} (v_i^t v_k - \delta_{ik})$

$$\frac{d}{dv_{i_0}}: 2K_f v_j - \sum_{i=M+1}^{N} \beta_{ij} v_j - \sum_{\substack{i=M+1 \\ i \neq j}}^{N} \beta_{ji} v_j = 0$$

d.h. $K_f v_j \in \langle v_{M+1} .. v_N \rangle = V$,

d.h. $V$ ist invarianter Unterraum von $K_f$.

$\Rightarrow V = \langle v_{i_1} .. v_{i_{N-M}} \rangle$,

$K_V$ = Restriktion von $K_f$ auf $V$.

$$\min_{U^tU=I} \sum_{i=M+1}^{N} v_i^t K_f v_i = \min_{\substack{v_i \in V \\ v_i^t v_k = \delta_{ik}}} \sum_{i=M+1}^{N} v_i^t K_f v_i = \min_{\substack{v_i \in V \\ v_i^t v_k = \delta_{ik}}} \sum_{i=M+1}^{N} v_i^t K_V v_i \overset{(a)}{=} \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_{N-M}}$$

$\square$

Effizienz von Gittern:

Def 5.3: $L$ erfüllt die Nyquist-Bed. bzgl. $K \subseteq \mathbb{R}^n$, falls $\mathring{K} + \eta$, $\eta \in \hat{L}$, paarweise fremd sind.

Wieviele Punkte pro Einheitsvolumen: $\frac{1}{\ell(\text{Fundamentalbereich})} = \frac{1}{\det(L)}$

Effizienz: $\frac{1}{\det(L)}$ möglichst klein.

$$\det(\hat{L}) = 2\pi^n \frac{1}{\det(W)},$$

deshalb $\frac{\mathrm{Vol}(K)}{\det(\hat{L})} \leq 1$ möglichst groß

$=: \eta(L,K) =:$ Effizienz von $L$ bzgl. $K$.

Max. Eff. $\Leftrightarrow \eta(L,K) = 1$ ! (wegen Nyquist-Bedingung).

Beisp.: 1) $K = [-b,b]^n$, $L = h\mathbb{Z}^n$, $h = \frac{\pi}{b} \Rightarrow \eta = 1$.

2) $\eta = \cancel{\phantom{x}} \cdot \frac{2^n}{\omega_n}$, $n=1: 1$, $n=2: \frac{\pi}{4} = 0{,}785$.

3) $\eta = \frac{\pi b^2}{2\sqrt{3}\, b^2}$ $(n=2!)$ $= 0{,}907$.

6. Invarianten, die auf Momenten basieren

Momente: $\int x^{k} f(x)\,dx =: m_k(f)\quad x_k = x_1^{k_1} x_2^{k_2}$

Translation: $m(f) = \frac{1}{m_{00}} \int x \cdot f(x)\,dx$, $m_{00} = \int f(x)\,dx$, $m$ Baryzentrum.

$f_y(x) = f(x-y)$: $m(f_y) = \frac{1}{m_{00}} \int (x+y) f(x)\,dx = m(f) + y$

Zentrierte Momente: $\mu_k(f) = \int (x - m(f))^k f(x)\,dx$

$\mu_k(f_y) = \int (x - m(f_y))^k f_y(x)\,dx = m(f)$.

Rotation: $f_U(x) = f(U^{-1}x)$. $= \cancel{\int x}$ – $m(f) = m$, Schwerpunkt rotiert mit.

$\mu_k(f_U) = \int (x - m(f_U))^k f_U(x)\,dx = \int (x - Um)^k f(U^{-1}x)\,dx$

$= \int (Ux - Um)^k f(x)\,dx = \int (U(x-m))^k f(x)\,dx$.

$(\mu_{20} + \mu_{02})(f_U) = \int |U(x-m)|^2 f(x)\,dx = (\mu_{20} + \mu_{02})(f)$, d.h. $\mu_{20} + \mu_{02}$ ist invariant.

Weitere Invarianten:

$(\mu_{20} + \mu_{02})^2 + 4\mu_{11}^2$; $(\mu_{30} - 3\mu_{12})^2 + (3\mu_{21} - \mu_{13})^2$; usw: $(\mu_{30} + \mu_{12})^2 + (\mu_{21} + \mu_{03})^2$.

4. Erkennung von Texturen

(Textur = doppelt periodische Funktion)

$f$ $2\pi$-periodisch in beiden Argumenten, $f(x) = f(x + 2\pi l)$, $l \in \mathbb{Z}^2$.

$$\hat{f}(\xi) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_k \, \delta(\xi - k) \quad \text{im distributionellen Sinn.}$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} f(x) e^{-ixk} dx.$$

$f$ sei $W$-periodisch, $W$ nichtsinguläre $2\times 2$-Matrix, d.h.

$f(x + Wl) = f(x) \ \forall l \in \mathbb{Z}^2$, $W = (w_1, w_2)$

$f_W(x) = f(W \cdot \frac{1}{2\pi} x)$ ist $2\pi$-periodisch in beiden Argumenten

$$\hat{f}_W(\xi) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_{W,k} \, \delta(\xi - k)$$

Aufg. 7: $\hat{f}_W(\xi) = c_1 \hat{f}\left(\left(\frac{W}{2\pi}\right)^{-t} \xi\right) = c_1 \hat{f}(2\pi W^{-t} \xi)$

$$= c_2 \sum_k \hat{f}_k \, \delta(\xi' - k)$$

$\delta_A = \frac{1}{|\det A|} \delta$; $\delta_A(x) = \delta(Ax)$; $A\xi = \xi'$

$$\hat{f}(\xi') = c_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_k \, \delta\left(\frac{1}{2\pi} W^t \xi' - k\right) = c_3 \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_k \, \delta(\xi - 2\pi W^{-t} k)$$

Praktische Berechnung nicht möglich, denn: bei Abschneiden auf grossem Bild geht die Periodizität verloren!

Beispiel: $\chi_{1/a}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-a,a]^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. $(f \chi_{1/a})^\wedge = c \cdot \hat{f} * \hat{\chi}_{1/a}$. $\delta_{-y} * \hat{\chi}_{1/a} = \hat{\chi}_{1/a}(\xi - y)$.

$$\hat{f} * \hat{\chi}_{1/a} = c \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_k \operatorname{sinc}\left(a \cdot (\xi - 2\pi W^{-t} k)\right) \quad \text{(verschmierte Maxima)}$$

5. Sind 2 Konturen gleich? (bis auf Bewegung)

(a) $\Gamma$: $x = \gamma(s)$, $0 \le s \le L$ = Länge von $\Gamma$, $s$ Bogenlänge, $\|\dot\gamma\| = 1$.

$$\left.\begin{aligned} \delta_\Gamma f &:= \int_\Gamma f = \int_0^L f(\gamma(s)) ds \\ \hat{\delta}_\Gamma(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^L e^{-i\xi\gamma(s)} ds \end{aligned}\right\} \text{Berechne } N, P!$$

(b) $\Gamma$ Polygonzug, erzeugt von $a_0, \ldots, a_{p-1}$.

wie oben, oder: Identifiziere $a_j$ in der Ebene mit $a_j$ in der komplexen Ebene.

$$\hat{a}_k = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} e^{-2\pi i jk/p} a_j.$$

Translation: $a_j \to a_j + b \Rightarrow \hat{a}_j \to \hat{a}_j + b\delta_{k0} \cdot p$. Normiere $a_j$ immer so, dass $b = \frac{1}{p} \sum a_j$, $a_j \to a_j - b$, also $SP = 0$, also $|\hat{a}_k|$ invariant.

Drehung: $a_j \to U(\varphi) a_j$, $U(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \hat{=} a_j \to e^{i\varphi} a_j$.

$\Rightarrow \hat{a}_k \to e^{i\varphi} \hat{a}_k$, $|\hat{a}_k|$ invariant.

Änderung der Numerierung: $\hat{a}_k \to \frac{1}{p} \sum_j e^{-2\pi i jk/p} a_{j+s} = e^{2\pi i k s} \hat{a}_k$

FD = Fourier-Deskriptor
(Sammelbegriff)

(d) ~~Gehen f, g durch Ähnlichkeit auseinander hervor,~~

$$\cancel{T_f = \int_{S^n} P_f(\omega)\, d\omega.}$$

Colview : kontrast 1 / kontrast 2

kontrast 1 : Ordne die <u>Farben</u>, so daß in jedem Farbstück gleichviele Werte liegen (preferred!) Neue Farben erzeugen durch lute:col(col1, col2, $\lambda$) $\to \lambda\,(col1) + (1-\lambda)\, col2$ !

kontrast 2 : Ordne den <u>Werten</u> neue Farben zu ! (mehr Aufwand)

$$(v-f, v-f) - (w-f, w-f) + (v-w, v-w) = 0$$

$$f \to f + v \Rightarrow v = 0 \qquad w = v + v'$$

$$f \perp v$$

$$(f,f) - (w-f, w-f) + (w,w) = 0$$

$$(w,w) - (f,f)$$

$$-2\,(w,f)$$

$$(v,v) + \cancel{(f,f)} + 2\,\mathrm{Re}\langle v,f\rangle - \langle w,w\rangle \cancel{(f,f)} + 2\,\mathrm{Re}\,(w,f) + (v-w, v-w) = 0$$

$$(v, \cancel{v) + 2\,\mathrm{Re}\,\langle} v, f$$

$$(v - f + v', v - f + v')$$

$$\hookrightarrow 2 \cdot \mathrm{Re}\langle$$

im Fourierraum: $\hat{g} = H\hat{f}$, $H(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \le b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$g = (2\pi)^{n/2}\, \check{H} * f.$$

a) $n=2$: $\check{H}(x) = c\, J_1(b|x|)/b|x|$

2) Butterworth von Ordnung m:

$$H(\xi) = \frac{1}{1+(|\xi|/b)^{2m}}$$

3) Medianfilter: Ersetze durch Median der Umgebung

4) Coefficient rooting: $\hat{g} = \frac{\hat{f}}{|\hat{f}|} \cdot |\hat{f}|^{\alpha}$; $0 \le \alpha \le 1$.

5) Image restoration:

$$g(x) = \int \underset{\text{Blur}}{B(x,y)}\, f(y)\,dy + \underset{\text{noise}}{\eta(y)}$$

Problem: $g, B$ gegeben, gesucht $f$. $f = \delta$: $\int B(x,y) f(y)\,dy = B(x,0)$, point-spread.

Sei $B(x,y) = B(x-y)$, z.B. $B(x) = c\, e^{-|x/r|^2}$

$$g = B * f + \eta$$

$\hat{g} = (2\pi)^{n/2} \hat{B} \hat{f} + \hat{\eta}$. $\hat{f} = (2\pi)^{-n/2} \frac{\hat{g} - \hat{\eta}}{\hat{B}}$, $\hat{\eta}$ leider unbekannt.

$\hat{f} - (2\pi)^{-n/2} \frac{\hat{g}}{\hat{B}} = -\frac{\hat{\eta}}{\hat{B}}$; $\hat{B}(\xi) \xrightarrow[\xi \to \infty]{} 0$ „sehr schnell".

$\hat{\eta}$: Typisch $|\hat{\eta}| = \sigma \Rightarrow \frac{\hat{\eta}}{\hat{B}}$ ist riesengroß für große $|\xi|$.

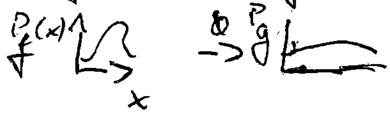
# §5. Bildaufbereitung (Image Enhancement)

1. Kontrastverbesserung:

Änderung der Grauwertskala, $g = \Phi(f)$, $\Phi$ monoton nichtlinear.

Systematische Konstruktion von $\Phi$ aufgrund von Histogrammen:

$f$ mit Dichte $P_f$.



Vorgabe $P_g$, gesucht $\Phi$.

$$P(g \le \Phi(x)) \Leftrightarrow P(f \le x) = \int_0^x P_f(x')\,dx'.$$

Beisp.: 1) $P_g(x) = \begin{cases} 0 & x \le g_0 \\ \frac{1}{g_1 - g_0} & g_0 \le x \le g_1 \\ 0 & x \ge g_1 \end{cases}$

$$\int_0^{\Phi(x)} P_g(x')\,dx' = \begin{cases} 0, & \Phi(x) \le g_0 \\ \frac{\Phi(x)-g_0}{g_1-g_0}, & \Phi(x) \in [g_0, g_1) \\ 1, & \Phi(x) \ge g_1 \end{cases}$$

2) $P_g(x) = \begin{cases} 0, & x \le g_0 \\ \alpha \cdot e^{-\alpha(x-g_0)}, & x \ge g_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \Phi(x) = g_0 - \frac{1}{\alpha} \ln(1 - P(x \le f)).$$

2. Hervorheben kleiner Details

(a) direkt. $g(x) = \sum_k a_k f(x - hk)$; ($g(\ell h)$ berechnet)

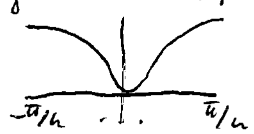
$$= S * f(x),\quad S(x) = \sum a_k\,\delta(x - hk)$$

$$\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\,\hat{S}(\xi)\,\hat{f}(\xi),\quad \hat{S}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \sum_k a_k e^{-ih\xi k}$$

$$= \underbrace{\sum_k a_k e^{-ih\xi k}}_{H(\xi)} \hat{f}(\xi),\ H \text{ Hochpaß-Filter.}$$

Beispiel: $g(x) = f(x) - \alpha\,(f(x-h) + f(x+h))$, $H(\xi) = 1 - \alpha\,(e^{-ih\xi} + e^{ih\xi}) = 1 - 2\alpha \cos h\xi$

Wichtig: $h$ ist $\le$ Nyquist-Frequenz, also: $\alpha \le 1/2$, insb. $\alpha = 1/2$.



2)
$$\begin{matrix} & -\alpha & \\ -\alpha & 1-\alpha & \\ & -\alpha & \end{matrix} \Rightarrow H(\xi) = 1 - 2\alpha(\cos h\xi_1 + \cos h\xi_2),\ \alpha \le 1/4, \text{ insb. } \alpha = 1/4.$$

(b) Im Fourier-Raum: $\hat{g}(\xi) = H(\xi)\,\hat{f}(\xi)$.

3. Glättung:

(a) Direkt. $H(\xi)$ Tiefpaß, z.B. $g(x) = \frac{1}{1+2\alpha}\,(f(x) + \alpha(f(x-h) + f(x+h)))$

$$H(\xi) = \frac{1}{1+2\alpha}\,(1 + 2\alpha \cos h\xi).$$

$\begin{matrix} & \alpha & \\ \alpha & 1 & \alpha \\ & \alpha & \end{matrix}$ für 2D, $H(\xi) = \frac{1}{1+4\alpha}\,(1 + 2\alpha\cos h\xi_1 + 2\alpha \cos h\xi_2)$

$A : F \to G$

$Af = \Sigma\, \sigma_k (f, f_k)\, g_k$

$A^* g = \Sigma\, \sigma_k\, (g, g_k)\, f_k$

$A f_k = \sigma_k g_k \quad A^* g_k = \sigma_k f_k.$

$f_k$ EV zum EW $\sigma_k^2$ von $A^*A$

$g_k$ EV zum EW $\sigma_k^2$ von $AA^*$

Beisp.: $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ $r = R(A)$ maximal. $A^*A$ hat $r$ pos. EW $\sigma_1^2 \dots \sigma_r^2$

$AA^*(Af_k) = \sigma^2 (Af_k)$. $g_k := \frac{1}{\sigma_k} f_k$. $\|g_k\|^2 = \frac{1}{\sigma_k^2}(Af_k, Af_k) = (f_k, f_k) = 1.$

$f = \sum_{k=1}^{r} (f, f_k) f_k + f^0,\ A^*Af^0 = 0 \Rightarrow Af = \sum_k \sigma_k (f, f_k)\, g_k$

Matrizenschreibweise: $F = (f_1 \dots f_r)$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}$, $G = (g_1 \dots g_k)$.

$Af = G \Sigma F^* f \Rightarrow A = G \Sigma F^*$, $A^* = F \Sigma G^*$, $F, G$ orthonormal, $\Sigma$ Diag mit pos. Elten $= \mathrm{diag}(\sigma)$

$m \overset{n}{\boxed{A}} = m \overset{r}{\Box}\ \overset{r}{\Box} r\ \overset{n}{\Box} r$

$A : F \to \mathbb{C}^n$, $Af = \begin{pmatrix} (f, v_1) \\ \vdots \\ (f, v_m) \end{pmatrix}$, $(AA^*)_{lk} = ((v_l, v_k))_{l,k}$, „Gram'sche Matrix" pos. def. falls $v_k$ l.u.

$AA^* g_k = \sigma_k^2 g_k$. $f_k = \frac{1}{\sigma_k} A^* g_k$

Lösung von $Af = g$ durch SVD: durch KQL.

$A^+ = F \Sigma^{-1} G$, $A^+ g = \Sigma \frac{1}{\sigma_k} (g, g_k) f_k.$

Satz von der majorisierten Konvergenz:
Seien $f_\varepsilon, f, g$ meßbare Funktionen in $\mathbb{R}^n$.

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f \text{ f.ü.}, \; |f_\varepsilon(x)| \le g(x), \; g \text{ integrierbar} \Rightarrow \int f_\varepsilon \to \int f.$$

Bew.: (in fini III (Forster 3))

---

Kor. zu 1.1 (Parseval'sche Formeln): $f, g \in \mathcal{S}$. Dann gilt:
a) $\int \hat{f} g\,dx = \int f \hat{g}\,dx$, $\int f \bar{g}\,d\xi = \int \hat{f}\,\bar{\hat{g}}\,dx$ b)

a) Aus dem Beweis zu 1.1:
$$\int g \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\,d\xi = \int \hat{g}(y) f(x+y)\,dy. \text{ Setze } x = 0. \checkmark$$
b) Setze in a) $\tilde{f}$ für $f$.

Bem.: 1) Die gleichen Beziehungen gelten auch für $\sim$.
2) $(f, g) := \int f \bar{g}$. Dann ist $\mathcal{S}$ unitär. Die Vervollständigung ergibt $L_2(\mathbb{R}^n)$. $(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) = (\tilde{f}, \tilde{g})$, d. h. $\sim, \wedge$ sind Isometrien von $\mathcal{S}$.

## §2. Die FT in $\mathcal{S}'$

Def 2.1: Ein lineares Funktional $T$ auf $\mathcal{S}$ heißt Distribution (temperiert), falls $C, k, l$ ex. mit
$$|Tf| \le C \sum_{\substack{|\alpha| \le k \\ |\beta| \le l}} |f|_{\alpha,\beta}; \quad |f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)|$$

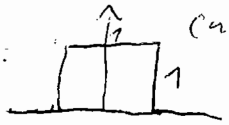
Die Menge der Distributionen wird mit $\mathcal{S}'$ bezeichnet.

Beisp.: 1) $g$ meßbar und schwach wachsend, d. h. $\int |g(x)|(1+|x|)^k\,dx < \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$.
$$Tf = \int g f\,dx: \; |Tf| = |\int g f| \le |\int |g(x)|(1+|x|)^k (1+|x|)^{-k} |f(x)|\,dx|$$
$$\le C \sup (1+|x|)^{-k} |f(x)|$$
$T = T_g = g$ (nach Konvention)

2) $Tf = f(0)$ $\delta$-Distribution

3) $Tf = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk)$, $h > 0$. $|Tf| \le |\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{-n-1} (1+|k|)^{n+1} f(hk)|$
$$\le \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{-n-1} \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(1 + \frac{|hk|}{h}\right)^{n+1} |f(hk)|$$
$$\le C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + \frac{x}{h}\right)^{n+1} |f(x)|$$
$T = Ш_h$ Sash-Distribution

4) $\Phi \ge 0$, $\int \Phi(x)\,dx = 1$, $\Phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$; $\Phi$ integrierbar (oder so was)
$$f \in \mathcal{S}. \; \int \Phi_\varepsilon(x) f(x)\,dx = \varepsilon^{-n} \int \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x)\,dx$$
$$= \int \Phi(x') f(\varepsilon x')\,dx' \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{maj. Kgz.}} f(0) \int \Phi(x)\,dx = f(0).$$
$T_{\Phi_\varepsilon} f \to \delta f \; \forall f \in \mathcal{S}$, d. h. $T_{\Phi_\varepsilon} \to \delta$.

z.B.: 

$(n=1)$

5) $Tf = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx =: \oint \frac{f(x)}{x}\,dx$. PV $\int \frac{f(x)}{x}\,dx$.
$(n=1!)$
Integral existiert (innen, außen trennen, MWS).

$|Tf| \leq 2\sup|f'| + \sup|f(x)|\cdot|x|\cdot\int\frac{dx}{x^2}$ ✓.

Def 2.2: Sei $T\in\mathcal{S}'$.

(a) Für $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$: $(D^\alpha T)f := (-1)^{|\alpha|}\,T D^\alpha f$

(b) $T_y f = T f_{-y}$ $\quad (f_y(x) := f(x+y))$.

(c) $g\in\mathcal{S}$. $(gT)f = T(gf)$, $f\in\mathcal{S}$.

(d) $g\in\mathcal{S}$. $(g*T)(x) = T\check{g}_{-x}$, $\check{g}(x)=g(-x)$.

(e) $f\in\mathcal{S}$. $\hat{T} f = T\hat{f}$.

Beisp.: a) $(D^\alpha\delta)f = \delta(D^\alpha f)\cdot(-1)^{|\alpha|} = (D^\alpha f)(0)\cdot(-1)^{|\alpha|}$.

b) $n=1$: $H(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$. $T_H(f)=\int H(x)f(x) = \int_0^\infty f(x)\,dx$

$\left(\frac{d}{dx}T_H\right)f = -T_H f' = -\int_0^\infty f'(x)\,dx = f(0)$.

c) $\delta_{-y} f = f(y)$. Schreibweise: $\int\delta(x-y)f(y)\,dy = f(x)$

d) $(\delta_{-y})^\wedge f = \delta_{-y}\hat{f} = \hat{f}(y) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\cancel{xy}} f(x)\,dx$

$= T_{(2\pi)^{-n/2}e^{-iyx}}$

$\Rightarrow (\delta_{-y})^\wedge = T_g$, $g(x)=(2\pi)^{-n/2}e^{-ixy}$

„$\Rightarrow$" $(\delta_{-y})^\wedge(x) = (2\pi)^{-n/2}e^{-ixy}$, $\hat{\delta}(x) = (2\pi)^{-n/2}$.

⚡ Vorsicht ⚡ „$\Rightarrow$"

e) $(f*\delta)(y) = \delta(\check{f}_{-y}) = \check{f}_{-y}(0) = \check{f}(-y) = f(y)$.

$\int f(x)\delta(x-y) = f(y)$.

$(g*T_h)(x) = T_h(\check{g}_{-x}) = \int h(y)g(x-y)\,dy = h*g\,(x)$.

f) $g\in L_1(\mathbb{R}^n)$, $(\hat{T}_g)f = \int g(\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-n/2}\int g(\xi)\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}\,dx\,d\xi$

$= (2\pi)^{-n/2}\int f(x)\int e^{-ix\xi}g(\xi)\,d\xi\,dx$

$= (T_{\hat{g}})f$

$g\in L_2(\mathbb{R}^n)$,

(5)

Satz 2.1: (Plancherel) Zu jedem $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ $\exists \hat{g} \in L_2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\hat{T}_g = T_{\hat{g}}, \|g\| = \|\hat{g}\|.$$

Beweis: $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $g_k(x) = \begin{cases} g(x), & \|x\| \leq k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$. $g_k \in L_1$, $\hat{g}_k$ existiert.
$\nwarrow$ (C-S).

$$\int |g_k| \leq \int 1 \cdot g_k \leq \int 1 \cdot \int g_k^2.$$

$$= \|g_k - g_l\|^2 = \int (g_k - g_l)^2 dx \underset{k,l\to\infty}{\to} 0, \text{ denn } \int g^2 < \infty.$$

$\Rightarrow g_k \to g \in L_2(\mathbb{R}^n)$, denn $L_2(\mathbb{R}^n)$ vollständig.

$\|\hat{g}_k - \hat{g}_l\| = \|g_k - g_l\| \to 0$. Da $L_2(\mathbb{R}^n)$ vollst.: $\hat{g}_k \to \hat{g}$.

$$\hat{T}_g f = T_g \hat{f} = \int g \hat{f} d\xi = \lim_{k\to\infty} \int g_k \hat{f} d\xi$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int \hat{g}_k f d\xi$$

Bemerkung: $\hat{g}_k(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{|x| \leq k} e^{-ix\xi} g(x) dx$

$$\hat{g} = \lim_{k\to\infty} g_k$$

Schreibweise: $\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} g(x) dx$

Bemerkung: $\sum_\ell \hat{f}(2\pi\ell) = (2\pi)^{-n/2} \sum_\ell f(\ell)$

$$\underset{\parallel}{\hat{f}(0)} = (2\pi)^{-n/2} \sum_\ell f(\ell) - \sum_{\ell \neq 0} \hat{f}(2\pi\ell)$$

$$(2\pi)^{-n/2} \int f(x)\,dx \Rightarrow \int f(x)\,dx = \sum_\ell f(\ell) - (2\pi)^{n/2} \sum_{\ell\neq 0} \hat{f}(2\pi\ell)$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ h^{-n}\int f(x')\,dx'}}{\int f(hx)\,dx} = \sum_\ell f(h\ell) - (2\pi)^{n/2} \sum_{\ell \neq 0} \hat{f}(2\pi\ell/h)$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \underbrace{h^n \sum_\ell f(h\ell)}_{\text{Trapezregel}} \underbrace{- (2\pi)^{n/2} \sum_{\ell\neq 0} \hat{f}\left(\frac{2\pi\ell}{h}\right)}_{\text{Integrationsfehler der Trapezregel, } =0 \text{ falls } \hat{f}(\xi)=0\ \forall |\xi| \geq \frac{2\pi}{h}}$$

Zu Satz 3.1: $(f,g) = (2\pi)^{n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}_k \hat{g}_k$, Parseval'sche Formel

§ 4. Shannon's Abtasttheorem

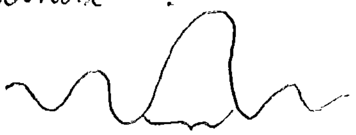
Def.: $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ heißt bandbeschränkt mit Bandbreite $b$ falls $\hat{f}(\xi) = 0\ \forall |\xi| \geq b$.

Beisp. 1) $n=1$: $\chi(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad \hat{\chi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-ix\xi}\,dx$

$$= (2\pi)^{-1/2} \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{i\xi} = (2\pi)^{-1/2} \cdot 2 \frac{\sin\xi}{\xi} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin\xi}{\xi} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sinc}(x)$$

$\widehat{\operatorname{sinc}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \chi$ ist bandbeschränkt mit Bandbreite 1.

$\widehat{\operatorname{sinc}_b} = b^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \chi_{1/b}$ (Bandbreite $b$)



Detail der Größe $\frac{2\pi}{b}$.

2) $n \geq 1$: $\operatorname{sinc}(x) = \prod \operatorname{sinc}(x_i)$

$$\widehat{\operatorname{sinc}_b} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2} b^{-n} \chi_{1/b}; \quad \chi_{1/b}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-b..+b]^n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bandbreite $b$.

3) $\chi_n(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Radial!

Aufg. 6: $\int_{S^{n-1}} e^{i\sigma\theta\omega}\,d\omega = (2\pi)^{n/2} \sigma^{(2-n)/2} J_{(n-2)/2}(\sigma)$

$$\hat{f}(\rho) = \rho^{(2-n)/2} \int_0^\infty r^{n/2} J_{(n-2)/2}(r\rho) f(r)\,dr$$

$$\hat{\chi}_n(\xi) = |\xi|^{(2-n)/2} \int_0^1 r^{n/2} J_{(n-2)/2}(r|\xi|)\,dr$$

$$\int_0^z t^\nu J_{\nu-1}(t)\,dt = z^\nu J_\nu(z)$$

$$\hat{\chi}_n(\xi) = |\xi|^{-n} |\xi|^{n/2} J_{n/2}(|\xi|) = \frac{J_{n/2}(|\xi|)}{|\xi|^{n/2}} = \operatorname{Sinc}(\xi), \text{ Bandbreite } 1.$$

§3. Fourierreihen

$$\int_{[0,2\pi]^n} e^{ikx} \cdot e^{-ilx}\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ (2\pi)^n & \text{sonst.} \end{cases} \quad \|e^{ikx}\| = (2\pi)^{n/2}.$$

$$f \in L^2.\ \hat{f}_k = (2\pi)^{-n} \int_{[0,2\pi]^n} e^{-ikx} f(x)\, dx, \text{ Fourier-koeff.}$$

Satz 3.1: $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und in allen Arg. $2\pi$-periodisch.

$\Rightarrow f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{ikx} \hat{f}_k$ gleichmäßig (und absolut).

Es gilt: $\|f\|^2 = (2\pi)^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}_k|^2$

Bew ($n=1$): $\sum_{|k|<K} q^k = q^{-K+1} \sum_{k=0}^{2K-2} q^k = q^{-K+1} \frac{q^{2K-1}-1}{q-1}$ $(q \neq 1)$

$$= \frac{q^K - q^{-K+1}}{q-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{|k|<K} e^{ikx} = \frac{e^{iKx} - e^{i(-K+1)x}}{e^{ix}-1}$$

$$= \frac{e^{i(K-\frac{1}{2})x} - e^{i(-K+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-i\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\sin((K-\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} \quad x \neq 2k\pi$$

$2K-1,\ x = 2k\pi$

$$\sum_{|k|<K} e^{ikx}\hat{f}_k = (2\pi)^{-1} \int_{[0,2\pi)} \sum_{|k|<K} e^{ikx-iky} f(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y) \sum_{|k|<K} e^{ik(x-y)}\, dy$$

Wenn $f$ nicht da wäre, wäre das Integral 1.

also: $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int f(x) \frac{\sin((K-\frac{1}{2})\cancel{x}y)}{\sin(\cancel{\frac{x}{2}}\frac{y}{2})} dy$

$\Sigma = \frac{1}{2\pi}\int f(y) \frac{\sin((K-\cancel{\frac{1}{2}})x)}{\sin(\frac{x-y}{2})} dy$

$$\Rightarrow f(x) - \Sigma = \frac{1}{2\pi}\int \left(f(x) - f(y)\right) \frac{\sin((K-\frac{1}{2})(x-y))}{\sin(\frac{x-y}{2})} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_x(y) \sin((K-\tfrac{1}{2})(x-y))\, dy;\quad g_x(y) = \frac{f(x)-f(y)}{\sin(\frac{x-y}{2})}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{K-\frac{1}{2}}\left\{-\int_0^{2\pi} g_x'(y)\cos((K-\tfrac{1}{2})(x-y))\,dy + \left[g_x(y)\cos((K-\tfrac{1}{2})(x-y))\right]_0^{2\pi}\right.$$

$= O(\frac{1}{K})$ glm. in $[0,2\pi]$, also in $\mathbb{R}$.

$f = \sum_k e^{ikx}\hat{f}_k \cdot \|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (2\pi)^n |\hat{f}_k|^2$ □

**Satz 4.1 (Shannon):** Sei $f$ $b$-bandbeschränkt, $0<h\le\frac{\pi}{b}$. Dann ist $f$ eindeutig bestimmt durch $f(hk)$, $k\in\mathbb{Z}^n$, und es gilt:

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\,\underbrace{\mathrm{sinc}}_{n\text{-dimensional}}\left(\frac{\pi}{h}(x-hk)\right)$$

Sind $f$ und $g$ $b$-bandbeschränkt, so gilt:

$$\int f\cdot g\,dx = h^n\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\,g(hk)$$

Bemerkungen:

1. $h\le\frac{\pi}{b}$ heißt Nyquist-Bedingung.
   $h<\frac{\pi}{b}$: Oversampling (Überabtasten).
   $h>\frac{\pi}{b}$: Undersampling (Unterabtasten)
2. $f(x)=\sin x$: $\hat f(\xi)=c(\delta_1-\delta_{-1})$ („Bandbreite 1")
   $h\le\frac{\pi}{b}=\pi\Rightarrow \sin(\pi k)=0$, also Shannon nicht anwendbar!

# F T

$\overset{H}{\overline{\phantom{d}}}$

$d$: Diskrete ~~...~~ FT eines $n$-dim. Vektors:

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-ikj\frac{2\pi}{n}} y_j, \quad (y*z)_j = \sum_{l=0}^{n-1} y_l z_{j-l}$$

$$\tilde{y}_j = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikj\frac{2\pi}{n}} y_k, \qquad q := e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

Eig: $$\tilde{\hat{y}}_j = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikj\frac{2\pi}{n}} \hat{y}_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} e^{+ikj\frac{2\pi}{n}} e^{-ikl\frac{2\pi}{n}} y_l$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik2\pi}{n}(j-l)} \right) y_l$$

$$\left( \sum_{k=0}^{n-1} \left( e^{\left(i\frac{2\pi}{n}(j-l)\right)}\right)^k \right) y_l \quad (\text{geom. Summe})$$

$= y_l$

$$\cancel{\widehat{(y*z)}_k = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-ikj\frac{2\pi}{n}} (y*z)_j}$$

$$\cancel{= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n} e^{-ikj\frac{2\pi}{n}} y_j z_{l+j}}$$

$$\cancel{= \sum_{l=0}^{n} \left( \sum_{j=l}^{n-1+l} e^{-ik(j-l)\frac{2\pi}{n}} y_{j-l} \right) z_l}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \left( \sum_{j=0}^{n-1} e^{-ikj\frac{2\pi}{n}} y_{j-l} \right) e^{+ikl} z_l$$

$$\widehat{(y*z)}_k = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-ikj\frac{2\pi}{n}} (y*z)_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} e^{-ikj\frac{2\pi}{n}} y_l z_{j-l}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-ikj\frac{2\pi}{n}} y_l z_{j-l}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=-l}^{n-1-l} e^{-ik(j+l)\frac{2\pi}{n}} y_l z_j$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{n-1} e^{-ikl\frac{2\pi}{n}} y_l\right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{-ikj\frac{2\pi}{n}} z_j\right)$$

$$= (\hat{y})_k \cdot (\hat{z})_k$$

$\hat{=}$ $\widehat{y*z} = \hat{y} \cdot \hat{z}$ im $\mathbb{R}^n$.

Sei $F$ $N \times M$ - Bild.

$$\mathcal{F}(n,m) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} e^{i\left(kn \cdot \frac{2\pi}{N} + j \cdot m \cdot \frac{2\pi}{M}\right)} F(k,j)$$

Separabel!

$$= \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\left(kn \cdot \frac{2\pi}{N}\right)} \sum_{j=0}^{M-1} e^{i\left(jm \frac{2\pi}{M}\right)} F(k,j)$$

Faltung im $\mathbb{R}^2$: $F * G^{(n,m)} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} F(k,j)\, G(k-n, j-m)$

$$\Rightarrow \widehat{(F*G)} = \hat{F} \cdot \hat{G}$$

$$\Rightarrow (F*G) = \widetilde{(\hat{F} \cdot \hat{G})}$$

# schnelle FT

$$\hat{Y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} Y_j \, q^{jk} \qquad m = n/2$$

Aufwand: $n^2$.

$$= \sum_{j=0}^{m-1} Y_{2j+1} \, q^{(2j+1)k} + \sum_{j=0}^{m-1} Y_{2j} \, q^{2jk}$$

$$= q^k \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{m-1} Y_{2j+1} \, q^{2jk} \right)}_{a_k = a_{m+k}} + \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{m-1} Y_{2j} \, q^{2jk} \right)}_{b_k = b_{m+k}}$$

Aufwand: $m^2 + m^2 = 2m^2 = \frac{n^2}{2}$

Rekursiv möglich.

Aufwand: $n \log n$ !