Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Optimale Steuerprozesse mit Retardierung in der gemischten Steuer-Zustandsbeschränkung

Agenda

1. Einführung in die retardierten Steuerprozesse
2. Minimumprinzip für gemischte Beschränkungen
3. Numerische Behandlung
4. Optimale Steuerung von kontinuierlichen Rührkesseln

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Retardierte Prozesse

Der retardierte Steuerprozess hängt nicht nur von dem aktuellen Zeitpunkt *t* ab, sondern von allen bis *t-r* zurückliegenden Zeitpunkten ab.

In dieser seiner allgemeinsten Form hat man es mit Funktionalen zu tun, die formal von unendlich vielen Parametern abhängen.

Betrachtungen hierzu sind schwierig und wurden bisher nur rudimentär durchgeführt.

Deshalb die Beschränkung auf eine konstante Retardierung:

$$y(t) = x(t - r)$$

Damit erhalten wir folgenden Steuerprozess:

Retardierte Prozesse

Problem 3.1 *Minimiere*

$$J(x,u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), y(t), u(t))dt \tag{3.2}$$

unter

$$\dot{x} = f(t, x(t), y(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \tag{3.3}$$

mit vorgegebener Anfangswertfunktion φ

$$x(t) = \varphi(t), \tag{3.4}$$

Retardierte Prozesse

der durch eine Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ *gegebenen Endbedingung*

$$\psi(x(T)) = 0 \tag{3.5}$$

und der durch $C : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *gegebenen Beschränkung*

$$C(t, x(t), y(t), u(t)) \leq 0 \tag{3.6}$$

Zu diesem Problem sollte ein Minimumprinzip im Stil des Minimumprinzip von Pontryagin bewiesen werden.

Minimumprinzip

Wichtig für die Formulierung des Minimumprinzips ist die erweiterte Hamilton-funktion:

Definition 3.2 *Es sei der retardierte Steuerprozess 3.1 und eine reelle Zahl* $\lambda_0 \geq 0$ *gegeben. Die erweiterte Hamilton-Funktion wird definiert durch*

$$\mathcal{H}(t,x,y,u,\lambda_0,\lambda,\mu) := \lambda_0 f_0(t,x,y,u) + \lambda f(t,x,y,u) + \mu C(t,x,y,u) \quad (3.11)$$

Minimumprinzip

Damit kann man nun das folgende Theorem beweisen:

Satz 3.2 (Minimumprinzip) *Es sei $(\bar{u}, \bar{x})$ ein lokal optimales Paar für das Problem 3.1, bei dem die Beschränkungen in der Form* (3.6) *vorliegen. Die erweiterte Hamilton-Funktion für Problem 3.1 sei durch*

$$H(t, x, y, u, \lambda, \mu) := f_0(t, x, y, u) + \lambda f(t, x, y, u) + \mu C(t, x, y, u)$$

gegeben. Dann gibt es eine absolut stetige und stückweise differenzierbare Kozustandsfunktion $\bar{\lambda} : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, Zeilenvektor, eine Multiplikatorfunktion $\bar{\mu} : [0, T] \to \mathbb{R}^p$, Zeilenvektor, sowie einen Multiplikator $\rho \in \mathbb{R}^q$, Zeilenvektor, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Minimumprinzip

(i) Für fast alle $t \in [0,T]$ *und für alle* $u \in \mathbb{R}^m$ *mit* $C(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t)) \leq 0$, *gilt die* ***Minimumbedingung***

$$\begin{aligned} H(t) &= H(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}(t)) \\ &\leq H(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), u, \bar{\lambda}(t)), \end{aligned} \tag{3.17}$$

sowie die lokale ***Minimumbedingung***

$$\mathcal{H}_u(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}(t), \bar{\mu}(t)) \;=\; 0, \tag{3.18}$$

Minimumprinzip

(ii) für fast alle $t \in [0,T]$ gelten die ***adjungierten Differentialgleichungen***

$$\begin{aligned}\dot{\bar\lambda}(t) &= -\mathcal{H}_x(t) - \chi_{[0,T]}(t+r)\mathcal{H}_y(t+r)\\ &= -\mathcal{H}_x(t,\bar x(t),\bar x(t-r),\bar u(t),\bar\lambda(t),\bar\mu(t))\\ &\quad - \chi_{[0,T]}(t+r)\mathcal{H}_y(t+r,\bar x(t+r),\bar x(t),\bar u(t+r),\bar\lambda(t+r),\bar\mu(t+r)),\end{aligned} \tag{3.19}$$

(iii) im Endzeitpunkt T gilt die ***Transversalitätsbedingung***

$$\bar\lambda(T) = g_x(\bar x(T)) + \rho\psi_x(\bar x(T)), \tag{3.20}$$

(iii) für fast alle $t \in [0,T]$ gilt die ***Multiplikatoreigenschaft***

$$\bar\mu(t) \geq 0, \quad \bar\mu_i C_i(t,\bar x(t),\bar y(t)\bar u(t)) = 0, \quad i = 1,\dots,p. \tag{3.21}$$

Minimumprinzip

Beweis Durch die Definition von

$$N := \left[\frac{T}{r}\right]_G ,$$

lässt sich das Intervall $[0, T]$ zunächst in die Intervalle $[0, Nr]$ und $[Nr, T]$ aufteilen.

Um das Problem 3.1 auf einen nichtretardierten optimalen Steuerprozess zu transformieren, definiert man $N+1$ Zustandsfunktionen auf dem Intervall $[0, r]$ durch

Minimumprinzip

Um das Problem 3.1 auf einen nichtretardierten optimalen Steuerprozess zu transformieren, definiert man $N+1$ Zustandsfunktionen auf dem Intervall $[0, r]$ durch

$$
\begin{aligned}
\xi_0(t) &:= x(t-r) = \varphi(t-r), \\
\xi_1(t) &:= x(t), \\
\xi_2(t) &:= x(t+r), \\
&\vdots \\
\xi_N(t) &:= x(t+(N-1)r)
\end{aligned}
$$

und eine Zustandsfunktion auf dem Intervall $[0, T-Nr]$ durch

$$\xi_{N+1}(t) := x(t+Nr).$$

Minimumprinzip

Damit alle, der neu eingeführten Zustandsfunktionen auf dem gleichen Intervall $[0,r]$ operieren, führt man für ξ_{N+1} eine Zeittransformation gemäß

$$t = s\frac{T-Nr}{r}$$

durch und betrachtet $s \in [0,r]$ als neue Zeitvariable. Durch diese Transformation operiert ξ_{N+1} auf den Intervall $[0,r]$ entsprechend der Vereinbarung

$$\tilde{\xi}_{N+1}(s) \;:=\; \xi_{N+1}(s\frac{T-Nr}{r}) \;=\; \xi_{N+1}(t).$$

Differenziert man $\tilde{\xi}_{N+1}$ nach s und berücksichtigt man die weiter unten eigeführte Dynamik für die neuen Zustände erhält man als neue DGL

Minimumprinzip

$$\frac{\tilde{\xi}_{N+1}}{ds} = \frac{\tilde{\xi}_{N+1}}{dt}\frac{dt}{ds} = f(t+Nr, \xi_{N+1}(t), \xi_N(t), \theta_{N+1}(t))\frac{T-Nr}{r}$$

Entsprechend lässt sich durch Substitution der Zielfunktionalanteil von $\tilde{\xi}_{N+1}$ berechnen. Um die Notation im Folgenden zu erleichtern wird davon ausgegangen, dass das Zeitintervall ein ganzzahliges Vielfaches der Retardierung beträgt. Wie gerade gezeigt stellt es keine Beschränkung an die Allgemeinheit dar.

Minimumprinzip

Es seien also die $N+1$ Zustandsfunktionen auf dem Intervall $[0, r]$ durch

$$
\begin{aligned}
\xi_0(t) &:= x(t-r) = \varphi(t-r), \\
\xi_1(t) &:= x(t), \\
\xi_2(t) &:= x(t+r), \\
&\vdots \\
\xi_N(t) &:= x(t+(N-1)r)
\end{aligned}
$$

gegeben.

In vektorieller Notation definiert man

$$\Xi(t) := (\xi_0(t), \ldots, \xi_N(t))^* \in \mathbb{R}^{(N+1)n}, \qquad t \in [0, r].$$

Minimumprinzip

In analoger Weise werden N Steuerfunktionen eingeführt

$$\theta_i := u(t + (i-1)r), \qquad i = 1, \ldots, N, \qquad t \in [0, r],$$

also

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &:= u(t), \\ \theta_2(t) &:= u(t+r), \\ &\vdots \\ \theta_N(t) &:= u(t + (N-1)r). \end{aligned}$$

$$\Theta(t) := (\theta_0(t), \ldots, \theta_N(t))^* \in \mathbb{R}^{Nm}, \qquad t \in [0, r].$$

Minimumprinzip

Für den Zustand Ξ liegt nun ein nichtretardiertes Differentialgleichungssystem vor

$$\dot{\Xi}(t) = F(t, \Xi(t), \Theta(t)), \qquad t \in [0, r], \tag{3.22}$$

hierbei ist

$$F = (F_0, \ldots, F_N)^*, \qquad F_i = F_i(t, \Xi, \Theta), \quad i = 0, \ldots, N,$$

Minimumprinzip

mit

$$
\begin{aligned}
F_0(t) \quad &:= \dot{\varphi}(t-r),\\
F_1(t) \quad &:= f(t, \xi_1(t), \xi_0(t), \theta_1(t)),\\
F_2(t) \quad &:= f(t+r, \xi_2(t), \xi_1(t), \theta_2(t)),\\
&\vdots\\
F_N(t) \quad &:= f(t+(N-1)r, \xi_N(t), \xi_{N-1}(t), \theta_N(t)).
\end{aligned}
$$

Die Anfangswerte der Zustände ξ_i ergeben sich aus der Stetigkeit der Zustandsfunktion x des Ausgangsproblems 3.1 in den Punkten ir, $i = 0, \ldots, N$. Es gilt demnach

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Minimumprinzip

$$\begin{aligned}
\xi_0(0) &= x(-r) = \varphi(-r), \\
\xi_1(0) &= x(0) = \varphi(0), \\
\xi_2(0) &= x(r) = \xi_1(r), \\
&\vdots \\
\xi_N(0) &= x((N-1)r) = \xi_{N-1}(r).
\end{aligned}$$

Diese Bestimmungsstücke ergeben $N-1$ gemischte Randbedingungen

$$\Psi_i(\Xi(0), \Xi(r)) := \xi_i(0) - \xi_{i-1}(r) = 0, \qquad i = 2, \ldots, N,$$

Minimumprinzip

zwei reine Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}\Psi_0(\Xi(0),\Xi(r)) := \xi_0(0)-\varphi(-r) &= 0,\\ \Psi_1(\Xi(0),\Xi(r)) := \xi_1(0)-\varphi(0) &= 0,\end{aligned}$$

sowie eine Endbedingung

$$\Psi_{N+1}(\Xi(0),\Xi(r)) := \psi(\xi_N(r)) = 0.$$

Mit den freien Variablen

$$\Xi^\alpha := (\xi_0^\alpha,\ldots,\xi_N^\alpha)^*, \quad \Xi^\beta := (\xi_0^\beta,\ldots,\xi_N^\beta)^* \in \mathbb{R}^{(N+1)n}, \quad \xi_i^\alpha,\xi_i^\beta \in \mathbb{R}^n$$

und

Minimumprinzip

$$\Psi : \mathbb{R}^{2(N+1)n} \longrightarrow \mathbb{R}^{(N+1)n+q},$$

definiert durch

$$\begin{aligned}\Psi(\Xi^\alpha, \Xi^\beta) :=& (\Psi_0(\Xi^\alpha, \Xi^\beta), \ldots, \Psi_{N+1}(\Xi^\alpha, \Xi^\beta))^* \\ =& (\xi_0^\alpha - \varphi(-r), \xi_1^\alpha - \varphi(0), \xi_2^\alpha - \xi_1^\beta, \ldots, \xi_N^\alpha - \xi_{N-1}^\beta, \psi(\xi_N^\beta))^*,\end{aligned}$$

lautet die Randbedingung in vektorieller Form

$$\Psi(\Xi(0), \Xi(r)) = 0. \tag{3.23}$$

Minimumprinzip

Das Zielfunktional von Problem 3.1 geht mit diesen Definitionen in die folgende Darstellung über. Man definiert

$$\begin{aligned}\Upsilon(\Xi, \Theta) &:= g(\xi_N(r)) + \int_0^r \sum_{i=1}^N f_0(t+(i-1)r, \xi_i(t), \xi_{i-1}(t), \theta_i(t))dt \\ &= \Gamma(\Xi(r)) + \int_0^r \Omega(t, \Xi(t), \Theta(t))dt,\end{aligned}$$

wobei

$$\Gamma(\Xi^\beta) := g(\xi_N^\beta)$$

und

$$\Omega(t, \Xi, \Theta) := \sum_{i=1}^N f_0(t+(i-1)r, \xi_i(t), \xi_{i-1}(t), \theta_i(t)) ist.$$

Minimumprinzip

Schließlich hat man aufgrund der gegebenen Steuer-Zustandsbeschränkung $C(t, x(t), x(t-r), u(t)) \leq 0$ mit einer neuen Restriktionsfunktion

$$R : [0, r] \times \mathbb{R}^{(N+1)n} \times \mathbb{R}^{Nm} \to \mathbb{R}^{Np}$$

definiert durch

$$R_i(t, \Xi, \Theta) \;:=\; C(t + (i-1)r, \xi_i, \xi_{i-1}, \theta_i) \in \mathbb{R}^p, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

eine Steuer-Zustandsbeschränkung für das nicht-retardierte Problem:

$$R(t, \Xi(t), \Theta(t)) \leq 0, \qquad t \in [0, r]. \tag{3.24}$$

Insgesamt gelangt man mit der Minimierung des Zielfunktionals $\Upsilon(\Xi, \Theta)$ unter der Dynamik (3.22), der Randbedingung (3.23) und den Restriktionen (3.24) zu einem *nichtretardierten* optimalen Steuerprozess mit gemischten Steuer-Zustandsbeschränkungen der Form:

Minimumprinzip

Problem 3.2 *Minimiere*

$$\Upsilon(\Xi, \Theta) \;=\; \Gamma(\Xi(r)) + \int_0^r \Omega(t, \Xi(t), \Theta(t))dt$$

unter

$$\dot{\Xi}(t) = F(t, \Xi(t), \Theta(t)), \qquad t \in [0, r],$$

$$\Psi(\Xi(0), \Xi(r)) = 0,$$

$$R(t, \Xi(t), \Theta(t)) \leq 0, \qquad t \in [0, r].$$

Numerik

Indirekte Verfahren:

Mit Hilfe des Minimumprinzips transformiert man den Prozess in ein Randwertproblem und löst es durch numerische Verfahren

Direkte Verfahren:

Diskretisierung bezüglich der zeitlichen Dimension. Transformation in ein nichtlineares Optimierungs-problem. Lösung des selbigen.

Aufgrund der einfachen Handhabung hier eine Beschränkung auf direkte Verfahren

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Numerik

Unter der Verwendung eines Einschrittverfahrens zur Diskretisierung lautet der diskretisierte Steuerprozess:

Problem 3.4 (Diskretisiertes Steuerungsproblem) *Minimiere*

$$J(x,u) = g(x(t_N)) \tag{3.41}$$

unter

$$-x_{i+1} + x_i + hf_h(x_i, x_{i-k}, u_i) = 0, \quad i = 0, \dots, N-1, \tag{3.42}$$

$$x_{-i} = \varphi(-ih), \quad i = 0, \dots, k, \tag{3.43}$$

$$\psi(x_N) = 0, \tag{3.44}$$

$$C(x_i, x_{i-k}, u_i) \leq 0, \quad i = 0, \dots, N. \tag{3.45}$$

Numerik

Verwendet man als Einschrittverfahren das einfache Euler-Verfahren, lässt sich die Konsistenz der Adjungierten Variablen aus den KKT-Bedingungen durch einfaches Nachrechnen zeigen.

Für Runge-Kutta Verfahren beliebiger Ordnung muss man zumindest bei nichtretardierten Steuerprozessen Bedingungen an die Koeffizienten stellen.

Für retardierte Prozesse fehlt noch ein Nachweis der Konsistenz für Riunge-Kutta Verfahren.

Die numerische Praxis lässt aber die Konsistenz vermuten.

CSTR

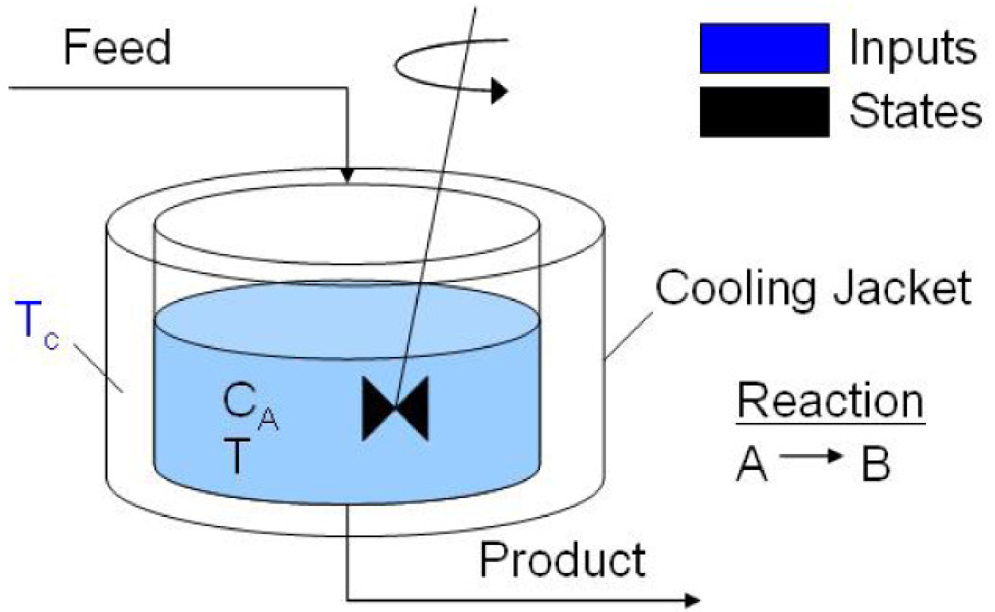


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung eines kontinuierlichen idealen Rührkessels

CSTR

Für einen solchen Reaktor existieren mehrere Gleichgewichtszustände.

Die Aufgabe ist es über die Regulierung der Temperatur der Kühlungs-
flüssigkeit den Reaktor von einem stabilen Zustand in den nächsten zu treiben.

Dabei soll die aufgewendete Energie minimiert werden.

Abbildung 5.2: CSTR Laboraufbau

CSTR

Für die Änderung der Konzentration des Ausgangsstoffes gilt:

$$V \frac{dc}{dt^*} \;=\; F(c_0 - c) - kVe^{-\frac{E}{RT}} c^n. \tag{5.1}$$

Für die Änderung der Temperatur im Reaktor gilt:

$$\begin{aligned} \rho V C_p \frac{dT}{dt^*} \;=\; & \rho F C_p (T_0 - T) - \Delta H k V e^{-\frac{E}{RT}} c^n \\ & - [hA + K(T(t-\alpha) - T_s)](T - T_c). \end{aligned} \tag{5.2}$$

CSTR

Die Aufgabe ist es nun dieses System in einer bestimmten Zeit T von einem stabilen Zustand in den anderen zu steuern. Wie von Leathrum et. al. in [16] gezeigt wurde, existieren für einen solchen Reaktor drei stabile Zustände.

Seien nun c_s die Konzentration von A im Reaktor und T_s die Temperatur des selbigen im neuen Gleichgewichtspunkt. Um besser rechnen zu können wird der neue Gleichgewichtspunkt in den Ursprung verschoben und skaliert, d.h. es werden die neuen Zustandsvariablen

$$x_1 = \frac{c - c_s}{c_s} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{T - T_s}{T_s}$$

CSTR

Fasst man gewisse Konstanten zusammen führt die Transformation auf eine neue dimensionslose Dynamik:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - \beta\left[(1+x_1)^n e^{\theta\frac{x_2}{x_2+1}} - 1\right],$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\gamma x_2 + \epsilon\left[(1+x_1)^n e^{\theta\frac{x_2}{x_2+1}} - 1\right] - u(t)x_2(t-\alpha)[x_2 + (1-\kappa)]$$

Der Term $[hA + K(T(t-\alpha) - T_s)]$ aus 5.2 ist der Wärmeleitungskoeffizient, der niemals negativ werden darf und das Maximum von hA_{max}, was der maximalen Zuflussrate der Kühlflüssigkeit entspricht, nicht überschreiten darf. Deshalb kann für das Problem eine gemischte Steuer-Zustandsbeschränkung

$$0 \leq hA + +K(T(t-\alpha) - T_s) \leq hA_{max} \tag{5.5}$$

formuliert werden. Nach der Transformation ergibt sich für das dimensionslose Steuerungsproblem die gemischte Steuer-Zustandsbeschränkung

$$u_{min} \leq u(t)x_2(t-\alpha) \leq u_{max}. \tag{5.6}$$

CSTR

Ein typisches optimales Steuerungsproblem, das sich unter diesen Nebenbedingungen ergibt, ist die Minimierung des *performance index*. Fasst man die Gleichungen (5.3) - (5.10) zusammen und setzt für die Konstanten die Werte

$$\begin{aligned} \beta &= 1, & \epsilon &= 0.25, \\ \theta &= 25, & \kappa &= 0.875, \\ \gamma &= 2, & hA_{max} &= 2 \end{aligned}$$

ein, ergibt sich folgendes Steuerungsproblem:

CSTR

Problem 5.1 (Einstufiger CSTR) *Minimiere*

$$\int_0^4 x_2^2(t)\ dt \tag{5.11}$$

unter

$$\dot{x_1} = -x_1 - \left[(1+x_1)^n e^{25\frac{x_2}{x_2+1}} - 1\right], \tag{5.12}$$

$$\dot{x_2} = -2x_2 + 0.25\left[(1+x_1)^n e^{25\frac{x_2}{x_2+1}} - 1\right] - u(t)x_2(t-\alpha)[x_2 + 0.125], \tag{5.13}$$

$$x_1(0) = x_{1_{sp}}, \tag{5.14}$$

$$x_2(t) = \varphi(t) \equiv x_{2_{sp}}, \qquad t \in [-\alpha, 0], \tag{5.15}$$

$$\psi(x(T)) = (x_1(T), x_2(T)) = 0 \in \mathbb{R}^2, \tag{5.16}$$

$$C_1(x,u) = u(t)x_2(t-\alpha) - 1 \leq 0, \quad t \in [0,4], \tag{5.17}$$

$$C_2(x,u) = u(t)x_2(t-\alpha) + 1 \leq 0, \quad t \in [0,4]. \tag{5.18}$$

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

CSTR

Sei $(\bar{x}, \bar{u})$ eine optimale Lösung von 5.1, dann existiert eine Kozustandsfunktion $\bar{\lambda}(t) = (\bar{\lambda}_1(t), \bar{\lambda}_2(t))$, so dass für fast alle $t \in [0, 4]$ die adjungierten Differentialgleichungen (3.19)

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\lambda}}_1(t) &= \bar{\lambda}_1(t) + (\bar{\lambda}_1(t) - 0.25\bar{\lambda}_2(t))n(1 + \bar{x}_1(t))^{n-1}e^{25\frac{\bar{x}_2(t)}{\bar{x}_2(t)+1}}, && (5.20)\\
\dot{\bar{\lambda}}_2(t) &= -2\bar{x}_2(t) + + 2\bar{\lambda}_2(t) + \bar{\lambda}_2(t)\bar{u}(t)\bar{x}_2(t-\alpha)\\
&\quad + (\bar{\lambda}_1(t) - 0.25\bar{\lambda}_2(t))(1 + \bar{x}_1(t))^{n}e^{25\frac{\bar{x}_2(t)}{\bar{x}_2(t)+1}}\frac{25}{(1+\bar{x}_2(t))^2}\\
&\quad + \chi_{[0,4]}(t+\alpha)(\bar{\lambda}_2(t+\alpha)\bar{u}(t+\alpha)(\bar{x}_2(t+\alpha) + 0.125)\\
&\quad - \bar{\mu}_1(t+\alpha)\bar{u}(t+\alpha) - \bar{\mu}_2(t+\alpha)\bar{u}(t+\alpha)) && (5.21)
\end{aligned}$$

erfüllt sind.

CSTR

Es ist klar, dass die beiden Beschränkungen nicht zeitgleich aktiv sein können, da es sich um eine untere und eine obere Grenze für denselben Term handelt. Ist eine der Beschränkungen aktiv so gilt

$$\frac{\partial}{\partial u} C_i(t) \; = \; \bar{x}_2(t-\alpha).$$

und somit ist die Trajektorie regulär, solange $\bar{x}_2(t-\alpha) \; \neq \; 0$ ist. Dies ist, wie man anhand der numerischen Lösung sehen wird, für alle Randstücke erfüllt.

Auf einem Randstück lässt sich die Steuerfunktion einfach aus der Gleichung $C_i(x(t), y(t), u(t)) \; = \; 0$ bestimmen. Also

$$\bar{u}(t) \; = \begin{cases} \frac{1}{\bar{x}_2(t-\alpha)}, & \text{für } C_1(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t)) \; = \; 0, \\ -\frac{1}{\bar{x}_2(t-\alpha)}, & \text{für } C_2(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t)) \; = \; 0 \end{cases} \tag{5.22}$$

CSTR

Insbesondere gilt auf inneren Teilstücken, die Teilmengen des Intervalls $[0, \alpha]$ sind, dass die Steuerung konstant gleich $\frac{1}{x_{2_{sp}}}$ oder $-\frac{1}{x_{2_{sp}}}$ ist. Da die Steuerung linear in den Steuerprozess eingeht, ist es sinnvoll die Schaltfunktion

$$\sigma(t) \; = \; \bar{\lambda}_2(t)\bar{x}_2(t-\alpha)[\bar{x}_2(t) + 0.125]$$

zu betrachten. Diese entsteht wenn man die Minimumbedingung (3.17) auswertet und alle identischen Terme entfernt. Dabei ist zu berücksichtigen, dass laut Satz 3.2 entlang der optimalen Trajektorie $\mu C(\bar{x}, \bar{u}) \equiv 0$ gilt:

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

CSTR

$$
\begin{aligned}
&\bar{x}_2^2 + \bar{\lambda}_1(-\bar{x}_1 - \left[(1+\bar{x}_1)^n \, e^{25\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_2+1}} - 1\right]) \\
&+ \bar{\lambda}_2(-2\bar{x}_2 + 0.25 \left[(1+\bar{x}_1)^n \, e^{25\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_2+1}} - 1\right] - \bar{u}(t)\bar{x}_2(t-\alpha)[\bar{x}_2 + 0.125]) \\
&\leq \\
&\bar{x}_2^2 + \bar{\lambda}_1(-\bar{x}_1 - \left[(1+\bar{x}_1)^n \, e^{25\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_2+1}} - 1\right]) \\
&\qquad + \bar{\lambda}_2(-2\bar{x}_2 + 0.25 \left[(1+\bar{x}_1)^n \, e^{25\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_2+1}} - 1\right] - u(\quad \bar{x}_2(t-\alpha)[\bar{x}_2 + 0.125]).
\end{aligned}
$$

Dies gilt für alle u mit $C(x(t), y(t), u(t)) \leq 0$. Die Schaltfunktion führt bei der Bestimmung der optimalen Steuerung $\bar{u}(t)$ zu jedem Zeitpunkt t auf das lineare Optimierungsproblem

CSTR

$$\min \{\sigma(t)u, \text{ unter } u \in \mathbb{R}^m, \; C(\bar{x}(t), \bar{y}(t), u) \leq 0\} . \tag{5.23}$$

Für das Problem 5.1 ergibt sich insbesondere, dass die optimale Steuerung einer Randsteuerung entspricht, solange $\sigma(t)$ ungleich 0 ist. Genauer gilt:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{x}_2(t-\alpha)}, & \text{für } \sigma(t) > 0, \\ -\frac{1}{\bar{x}_2(t-\alpha)}, & \text{für } \sigma(t) < 0, \\ \text{unbestimmt}, & \text{für } \sigma(t) = 0. \end{cases} \tag{5.24}$$

Für den Fall, dass $\sigma(t) = 0$ gilt kann, wie im zweiten Kapitel beschrieben, durch differenzieren der Schaltfunktion nach t versucht werden eine singuläre Steuerung zu bestimmen. Betrachtet man allerdings die erste Ableitung der Schaltfunktion

CSTR

$$
\begin{aligned}
\dot{\sigma}(t) \;=\; & \dot{\bar{\lambda}}_2(t)\bar{x}_2(t-\alpha)(\bar{x}_2(t)+0.125)+ \\
& \bar{\lambda}_2(t)\dot{\bar{x}}_2(t-\alpha)(\bar{x}_2(t)+0.125)+\bar{\lambda}_2(t)\bar{x}_2(t-\alpha)(\dot{\bar{x}}_2(t)+0.125)
\end{aligned}
$$

und setzt die adjungierten Differentialgleichungen (5.21) und die Dynamik (5.12) ein,

sieht man, dass dies unmöglich ist, da neben der Komplexität der Terme das Vorliegen der Steuerung in avancierter und retardierter Form eine analytische Lösung verhindert.

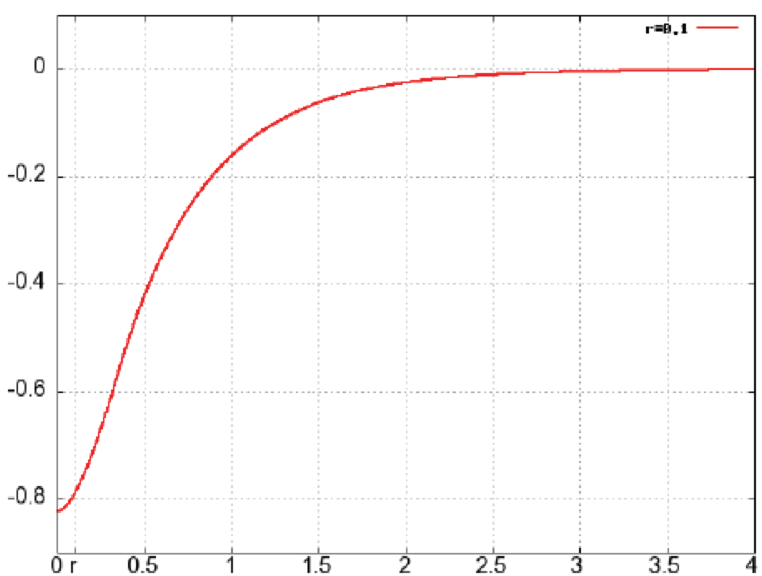
Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

CSTR

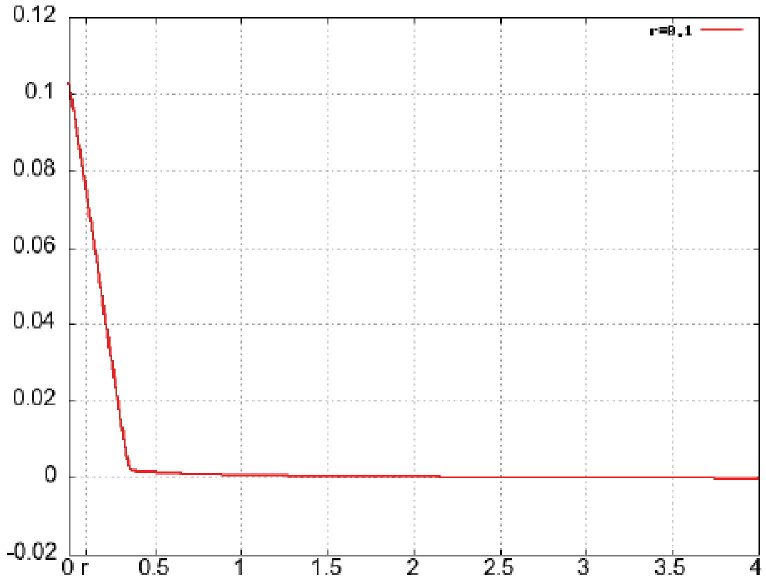
$$
\begin{aligned}
\dot{\sigma}(t) \;=\; & (-2\bar{x}_2(t) + + 2\bar{\lambda}_2(t) + \bar{\lambda}_2(t)\bar{u}(t)\bar{x}_2(t-\alpha) \\
+ \; & (\bar{\lambda}_1(t) - 0.25\bar{\lambda}_2(t))(1+\bar{x}_1(t))^n e^{25\frac{\bar{x}_2(t)}{\bar{x}_2(t)+1}} \frac{25}{(1+\bar{x}_2(t))^2} \\
+ \; & \chi_{[0,4]}(t+\alpha)(\bar{\lambda}_2(t+\alpha)\bar{u}(t+\alpha)(\bar{x}_2(t+\alpha)+0.125) \\
- \; & \bar{\mu}_1(t+\alpha)\bar{u}(t+\alpha) - \bar{\mu}_2(t+\alpha)\bar{u}(t+\alpha)))\bar{x}_2(t-\alpha)(\bar{x}_2(t)+0.125) + \\
& \bar{\lambda}_2(t)(-2\bar{x}_2(t-\alpha) + 0.25\left[(1+\bar{x}_1(t-\alpha))^n e^{25\frac{\bar{x}_2(t-\alpha)}{\bar{x}_2(t-\alpha)+1}} - 1\right] - \\
& \bar{u}(t-\alpha)\bar{x}_2(t)[\bar{x}_2(t-\alpha)+0.125])(\bar{x}_2(t)+0.125) \\
& + \bar{\lambda}_2(t)\bar{x}_2(t-\alpha)((-2\bar{x}_2(t) + 0.25\left[(1+\bar{x}_1(t))^n e^{25\frac{\bar{x}_2(t)}{\bar{x}_2(t)+1}} - 1\right] - \\
& \qquad \bar{u}(t)\bar{x}_2(t-\alpha)[\bar{x}_2(t)+0.125]) + 0.125),
\end{aligned}
$$

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

CSTR



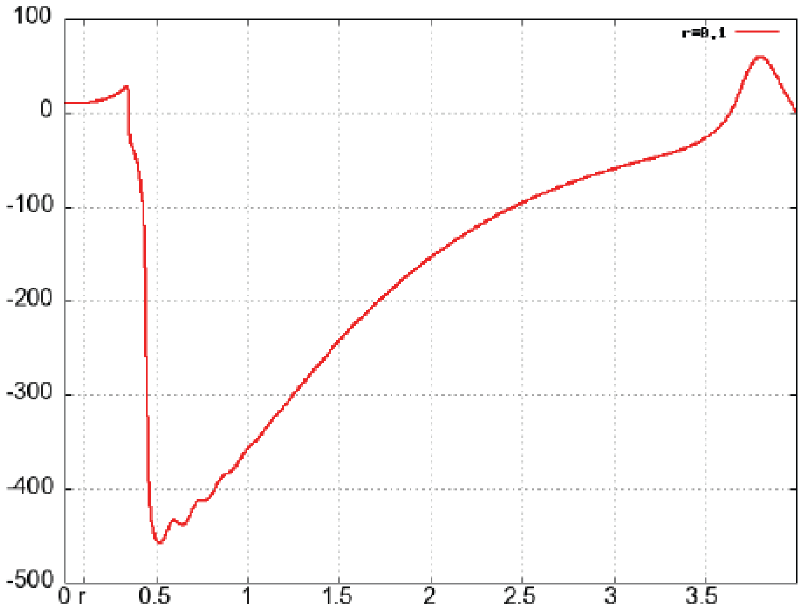
Zustand $x_1(t)$



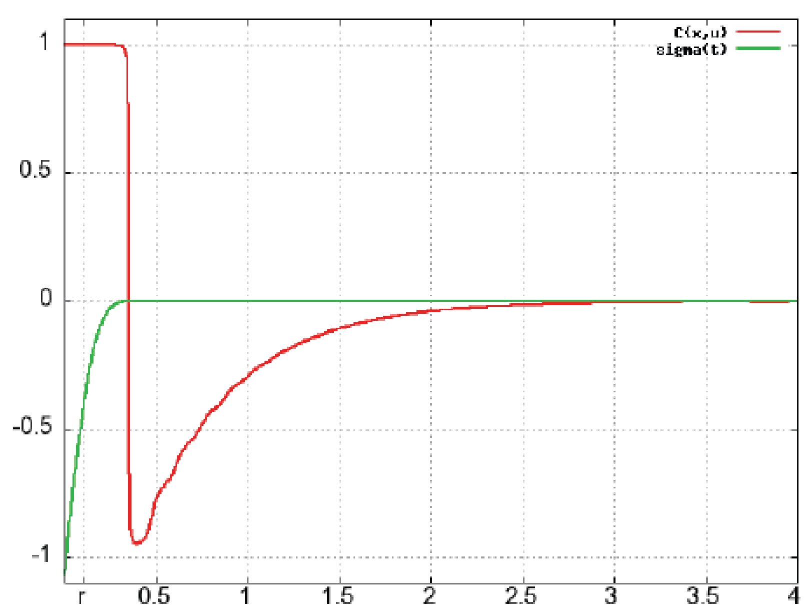
Zustand $x_2(t)$

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

CSTR

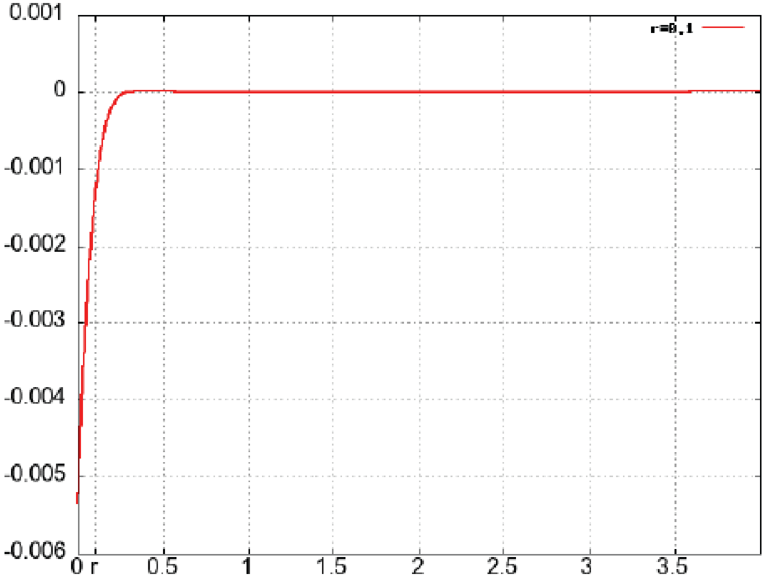


Steuerung $u(t)$

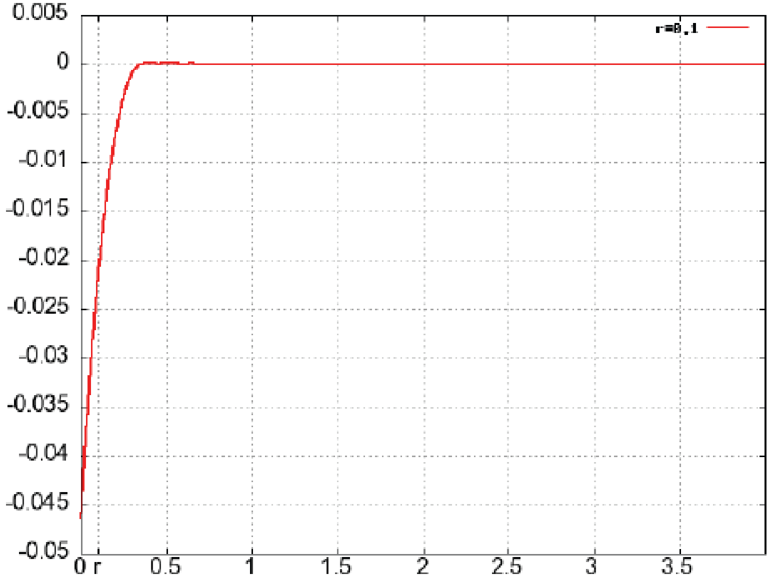


Skalierte Schaltfunktion $\sigma(t)$

CSTR



Adjungierte $\lambda_1(t)$



Adjungierte $\lambda_2(t)$