

Optimierungsmethoden in der Bildverarbeitung

Bildentrauschung und Kantenerkennung mit L^p -Regularisierung und Gradientenbeschränkung bei Graustufenbildern

Marzena Franek

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

22. Januar 2008



1 Einleitung

- 1 Einleitung
- 2 Formulierung des Steuerungsproblems
 - Der Variationsansatz
 - Formulierung des Steuerungsproblems
 - Regularisierung

- 1 Einleitung
- 2 Formulierung des Steuerungsproblems
 - Der Variationsansatz
 - Formulierung des Steuerungsproblems
 - Regularisierung
- 3 Bildsegmentierung mit dem Ambrosio-Tortorelli-Funktional
 - Das Funktional von Ambrosio-Tortorelli

- 1 Einleitung
- 2 Formulierung des Steuerungsproblems
 - Der Variationsansatz
 - Formulierung des Steuerungsproblems
 - Regularisierung
- 3 Bildsegmentierung mit dem Ambrosio-Tortorelli-Funktional
 - Das Funktional von Ambrosio-Tortorelli
- 4 Numerische Behandlung
 - Direkte Lösungsverfahren
 - Erstellen eines Kantenbildes
 - Bewertungsmethoden für Bilder

- 1 Einleitung
- 2 Formulierung des Steuerungsproblems
 - Der Variationsansatz
 - Formulierung des Steuerungsproblems
 - Regularisierung
- 3 Bildsegmentierung mit dem Ambrosio-Tortorelli-Funktional
 - Das Funktional von Ambrosio-Tortorelli
- 4 Numerische Behandlung
 - Direkte Lösungsverfahren
 - Erstellen eines Kantenbildes
 - Bewertungsmethoden für Bilder
- 5 Versuchsergebnisse

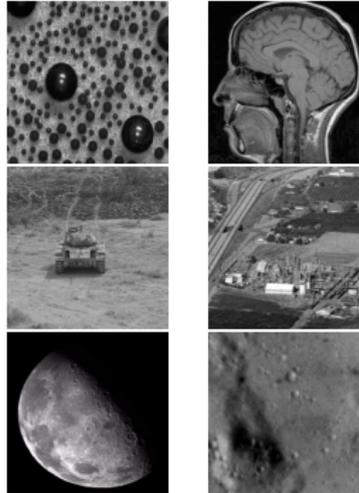
- 1 Einleitung
- 2 Formulierung des Steuerungsproblems
 - Der Variationsansatz
 - Formulierung des Steuerungsproblems
 - Regularisierung
- 3 Bildsegmentierung mit dem Ambrosio-Tortorelli-Funktional
 - Das Funktional von Ambrosio-Tortorelli
- 4 Numerische Behandlung
 - Direkte Lösungsverfahren
 - Erstellen eines Kantenbildes
 - Bewertungsmethoden für Bilder
- 5 Versuchsergebnisse

Bildverarbeitung

Bildverarbeitung: Bildverbesserung, Bildwiederherstellung, Bildsegmentierung, Bildkompression...

Es gibt zahlreiche Anwendungsgebiete:

- Nanotechnologie
- Mikroskopie
- Medizin
- Astronomie
- Meteorologie
- Militär



Quelle: <http://sipi.usc.edu/database/>

Bildwiederherstellung

Wieso ist eine Bildwiederherstellung notwendig?

- **Scanner:** analoge Bilder die verunreinigt, verkratzt sind; Auflösungsbegrenzung des Scanners \Rightarrow Qualitätsverlust;
- **Digitalfotografie-Fotochips:** Detektorrauschen
- **Mikroskopie:** zahlreiche Spiegel und Reflektoren \Rightarrow Verzerrungen, Rauschen
- **Astronomie/Satellitenbilder:** Turbulenzen der Erdatmosphäre \Rightarrow Verzerrungen
- ...

Zufällige Fehler

- Gauss'sches Rauschen
- Salt and Pepper Noise

Systematischer Fehler

- Blur/Verzerrung



Das Rauschmodell

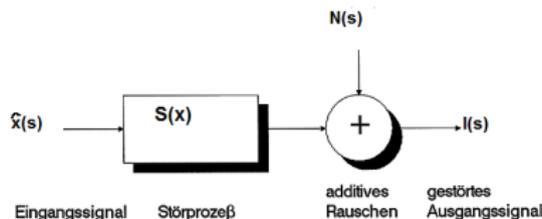
$\hat{x} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei das tatsächliche und $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ das aufgezeichnete gestörte Bild. Der Zusammenhang des systematischen und des zufälligen Fehlers lässt sich verdeutlichen durch

$$I(s) = S(\hat{x}(s)) + N(s), \quad \forall s \in \Omega. \quad (1)$$

$S : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ bezeichnet den systematischen Fehler

$N(s)$ bezeichnet den zufälligen Fehler

Wertebereich des Graustufenbildes $W = [0, 1]$



Ziel:

Aus dem beobachteten gestörten Bild $I(s)$ soll eine Approximation $x \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$ mit $1 \leq p < \infty$ an das Originalbild berechnet werden. Zusätzlich soll das Bild segmentiert werden.

Zwei Ansätze zur Lösung:

- partielle Differentialgleichungen
- Variationsansatz

Wir berechnen eine Approximation an das Originalbild, indem wir ein **Variationsproblem** bzw. ein **Steuerungsproblem** lösen!

- 1 Einleitung
- 2 Formulierung des Steuerungsproblems
 - Der Variationsansatz
 - Formulierung des Steuerungsproblems
 - Regularisierung
- 3 Bildsegmentierung mit dem Ambrosio-Tortorelli-Funktional
 - Das Funktional von Ambrosio-Tortorelli
- 4 Numerische Behandlung
 - Direkte Lösungsverfahren
 - Erstellen eines Kantenbildes
 - Bewertungsmethoden für Bilder
- 5 Versuchsergebnisse

Variationsansatz

Variationsansatz (vgl. Aubert/Kornprobst)

Bestimme eine Näherung $x \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$, welche das Funktional

$$F(x) = \int_{\Omega} (I(s) - x(s))^2 ds + \lambda \cdot \int_{\Omega} f(|\nabla x(s)|) ds \quad (2)$$

minimiert, $1 < p < \infty$.

- Der erste Term (Datenterm) misst die Datentreue zum originalen Datensatz
- Der zweite Term ist ein Regularisierungsterm, der mit einem Faktor $\lambda \geq 0$ gewichtet wird
- Die Regularisierungsfunktion f wird im Allgemeinen konvex gewählt; unerwünschte Bildeigenschaften sollen bestraft werden

Vom Variationsproblem zum Steuerungsproblem

Einführung einer Steuervariable $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\nabla x(s) =: u(s)$.

Steuerungsproblem

Gesucht ist ein Funktionenpaar $(x, u) \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \times L^p(\Omega, \mathbb{R}^2)$ mit $1 < p < \infty$ und $\lambda \geq 0$, welches das Zielfunktional

$$F(x, u) = \int_{\Omega} (x(s) - I(s))^2 ds + \lambda \int_{\Omega} (f(|u(s)|)) ds \quad (3)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\nabla x(s) = u(s), \quad u(s) \in K \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (\forall) s \in \Omega \quad (4)$$

minimiert. Die Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ sei konvex und kompakt.

Steuerbeschränkung

1. Möglichkeit:

Die Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ ist konvex und kompakt, und der Gradient des Bildes verbleibt in einem q -Normkörper mit $1 \leq q < \infty$. Die Konstante R bestimmt den Grad der Beschränkung.

$$u \in K = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |u_1|^q + |u_2|^q \leq R^q\} \quad (5)$$

2. Möglichkeit:

Wir betrachten die Maximumnorm von u , d.h. den Fall $q = \infty$. Die Steuerbeschränkung hat dann die Gestalt

$$u \in K = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |u_1| \leq R_1, |u_2| \leq R_2\} \quad (6)$$

Wahl der Regularisierung

- quadratische Regularisierung: $f(r) = r^2$
 - Dirichlet-Integral $\int_{\Omega} |\nabla x(s)|^2 ds$
 - Im Funktionenraum $W^{1,2}(\Omega)$ sind beide Terme wohldefiniert
 - Man kann zeigen, dass dann eine eindeutige Lösung des Problems $\inf \{F(x), x \in W^{1,2}(\Omega)\}$ existiert.
 - Nachteil: isotrope Glättung, d.h. Glättung auch über Kanten hinweg
 - *Oversmoothing*, Kanten verschmieren
- Totalvariation: $f(r) = |r|_{TV}$
 - anisotrope Glättung
 - Rauschen wird gut entfernt, Kanten werden nicht überglättet
 - Nachteil: staircasing, Texturverlust
 - Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung in BV gezeigt (vgl. Chambolle/Lions)

Wahl der Regularisierungsfunktion

- konvexe, nichtquadratische Regularisierung: $f(r) = \sqrt{1 + r^2}$
 - isotrope Glättung in Punkten mit kleinem Betragsgradienten
- von Perona-Malik vorgeschlagene nichtkonvexe Funktion:
$$f(r) = \frac{r^2}{1+r^2}$$
 - anisotrope Glättung und scharfe Kanten
 - sehr gute Resultate
 - keine Existenzaussagen

Im konvexen Fall kann die Existenz einer globalen Lösung gesichert werden (vgl. Pontrjaginsches Maximumprinzip von Wagner.)

Anmerkung zur TV-Regularisierung

Der Betrag der Funktion ist nicht differenzierbar in Null, d.h. es gibt numerische Probleme falls $\nabla x \approx 0$.

Wir benutzen daher für numerische Berechnungen eine gebräuchliche modifizierte Form:

$$|\nabla x(s)|_\epsilon := \sqrt{|\nabla x(s)|^2 + \epsilon^2}$$

wobei $\epsilon > 0$ ein betragsmäßig kleiner Parameter sei. Wir minimieren

$$F_\epsilon(x) = \int_{\Omega} (I(s) - x(s))^2 ds + \lambda \cdot \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla x(s)|^2 + \epsilon^2} ds.$$

Fragen im Raum

- Inwieweit kann man die optimale Steuerung als Kantendetektor benutzen?

Fragen im Raum

- Inwieweit kann man die optimale Steuerung als Kantendetektor benutzen?
- Kann man den Regularisierungsterm durch die Einführung einer Steuerbeschränkung ersetzen?

Fragen im Raum

- Inwieweit kann man die optimale Steuerung als Kantendetektor benutzen?
- Kann man den Regularisierungsterm durch die Einführung einer Steuerbeschränkung ersetzen?
- Erzielen wir ähnlich gute Ergebnisse, wie wir sie für das Funktional von Ambrosio-Tortorelli erhalten?

- 1 Einleitung
- 2 Formulierung des Steuerungsproblems
 - Der Variationsansatz
 - Formulierung des Steuerungsproblems
 - Regularisierung
- 3 Bildsegmentierung mit dem Ambrosio-Tortorelli-Funktional
 - Das Funktional von Ambrosio-Tortorelli
- 4 Numerische Behandlung
 - Direkte Lösungsverfahren
 - Erstellen eines Kantenbildes
 - Bewertungsmethoden für Bilder
- 5 Versuchsergebnisse

Das Funktional von Ambrosio-Tortorelli

- Idee: Approximation des Mumford-Shah-Funktional durch eine Folge von Funktionalen F_ϵ
- die Äquivalenz der Funktionalen kann mit der Γ -Konvergenz gezeigt werden
- Bildsegmentierung mit dem Funktional von Ambrosio-Tortorelli auf einfache Weise möglich
- wir erhalten sowohl eine Glättung bzw. Entrauschung des Bildes, als auch eine Kantenerkennung

Das Funktional von Ambrosio-Tortorelli

Minimiere das Funktional über x und die Kantenfunktion k für festes ϵ : (Parameter c_1, c_2, c_3, c_4):

$$F_\epsilon(x, k) = \underbrace{c_1 \int_{\Omega} (x(s) - I(s))^2 ds}_1 + \underbrace{c_2 \int_{\Omega} |\nabla k(s)|^p (k(s)^2 + c_4) ds}_2 \\ + \underbrace{c_3 \int_{\Omega} \left(\epsilon |\nabla k(s)|^2 + \frac{1}{4\epsilon} (k(s) - 1)^2 \right) ds}_3$$

- (1) klassischer Defektminimierungsterm
- (2) ersetzt den klassischen Regularisierungsterm; Kopplung von x und k ; mit betragsgroßem $\nabla x(s)$ wird $k(s) \approx 0$ (schwarz) bevorzugt
- (3) quadratische Regularisierung für k und ein Term, der für fast alle $s \in \Omega$, $k(s) \approx 1$ erzwingt; dünne und scharfe Kanten werden bevorzugt
- Parameter c_1, c_2, c_3, c_4 müssen geeignet gewählt werden
- optimale Werte: M.Rumpf
 $c_1 = 1275$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 0.5$, $c_4 = 0$, $\epsilon = 0.5 * h$ mit Maschenweite h

- 1 Einleitung
- 2 Formulierung des Steuerungsproblems
 - Der Variationsansatz
 - Formulierung des Steuerungsproblems
 - Regularisierung
- 3 Bildsegmentierung mit dem Ambrosio-Tortorelli-Funktional
 - Das Funktional von Ambrosio-Tortorelli
- 4 Numerische Behandlung
 - Direkte Lösungsverfahren
 - Erstellen eines Kantenbildes
 - Bewertungsmethoden für Bilder
- 5 Versuchsergebnisse

Diskretisierung

Strategie: Erst diskretisieren, dann optimieren!

- 1 • wir diskretisieren den Steuerprozess mit
 • Finiten-Differenzen-Verfahren auf einem Gitter
 • die Integrale berechnen wir mit der Trapez-Kubaturformel
 ⇒ endlichdimensionales Optimierungsproblem
- 2 wende Optimierungsverfahren darauf an (IPOPT -
Interior-Point-Optimization, in Verbindung mit Ampl und
Matlab)

Diskretisierung

Beispiel: Diskretisierung des Steuerungsproblems mit modifizierter TV-Regularisierung:

$$\text{Minimiere } F_\epsilon(x, u) = \int_{\Omega} (I(s) - x(s))^2 ds + \lambda \int_{\Omega} \sqrt{|u(s)|^2 + \epsilon^2} ds,$$

$$\text{mit } u(s) = \nabla x(s) \quad (\forall) s \in \Omega,$$

$$u(s) \in K = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |u_1|^q + |u_2|^q \leq R^q\}.$$

Wir betrachten den diskretisierten Definitionsbereich
 $\Omega_d = \{1, \dots, M_1\} \times \{1, \dots, M_2\}$. Mit s_{ij} bezeichnen wir die
 Gitterpunkte, und mit x_{ij} und l_{ij} die Grauwerte an der Stelle s_{ij} für
 $(i, j) \in \Omega_d \Rightarrow$ diskretisiertes Steuerungsproblem:

$$F_d(x, u) := h^2 \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} (l_{ij} - x_{ij})^2 + \lambda \cdot h^2 \sum_{i=1}^{M_1-1} \sum_{j=1}^{M_2-1} \sqrt{(u_{ij}^{(1)})^2 + (u_{ij}^{(2)})^2 + \epsilon^2}$$

$$\text{mit } |u_{ij}^{(1)}|^q + |u_{ij}^{(2)}|^q \leq R^q,$$

Vorwärts-Differenzenquotient:

$$\frac{\partial x}{\partial s_1} \approx u_{ij}^{(1)} = \delta_{s_1}^+ x_{ij} = \frac{x_{i+1j} - x_{ij}}{h},$$

$$\frac{\partial x}{\partial s_2} \approx u_{ij}^{(2)} = \delta_{s_2}^+ x_{ij} = \frac{x_{ij+1} - x_{ij}}{h}.$$

Optimieren

Innere-Punkt-Verfahren

- Optimierungssolver IPOPT
- Softwarepaket zur Lösung groß skaliertes nichtlinearer Optimierungsprobleme
- Innere-Punkt-Methode mit einem Filter-Line-Search-Algorithmus (Wächter und Biegler)

Erstellen eines Kantenbildes

- AT-Funktional \Rightarrow wiederhergestelltes Bild + Kantenbild
- Steuerungsproblem: optimale Steuerung $u = (u_1, u_2) \Rightarrow$ Kantenbild

- 1 Idee: definiere Kanten dort, wo die Steuerung aktiv wird, d.h. wo

$$|u_1(s)|^q + |u_2(s)|^q = R^q$$

- 2 Alternativ: dort wo die Steuerung nahezu aktiv wird

Bewertung

1. Bewertung der Bilder

SNR (Signal-to-Noise-ratio)

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \hat{x}_{ij}^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\hat{x}_{ij} - x_{ij})^2} \right)$$

- gemessen in dB (deciBel)
- je größer der SNR-Wert, desto besser ist die Qualität des Bildes

2. Bewertung der Kantenbilder

- visuelle Bewertung

Erwartung!

- entrauschte, glatte homogene Regionen
- gut erhaltene Kanten, die diese homogenen Regionen begrenzen
- keine verschmierten Kanten
- keine verrauschten Kantenbilder



(a) Mona-Lisa-
Ausschnitt



(b) Kantenbild

- 1 Einleitung
- 2 Formulierung des Steuerungsproblems
 - Der Variationsansatz
 - Formulierung des Steuerungsproblems
 - Regularisierung
- 3 Bildsegmentierung mit dem Ambrosio-Tortorelli-Funktional
 - Das Funktional von Ambrosio-Tortorelli
- 4 Numerische Behandlung
 - Direkte Lösungsverfahren
 - Erstellen eines Kantenbildes
 - Bewertungsmethoden für Bilder
- 5 Versuchsergebnisse