

# Reduzierte Basis Methoden angewandt auf die Richards Gleichung

Martin Drohmann

mdrohmann@uni-muenster.de

Skiseminarvortrag: 23.01.2008

- 1 Was sind reduzierte Basis-Methoden?
- 2 Beispielhafte Konstruktion einer reduzierten Basis für die Finite Volumen Methode
- 3 Richardsgleichung
- 4 Erste Implementierungen

Reduzierte Basis - Methoden sind eine Erweiterung für PDE Diskretisierungsverfahren (FEM, FV, LDG).

Reduzierte Basis - Methoden sind eine Erweiterung für PDE Diskretisierungsverfahren (FEM, FV, LDG).

## Ziele

- Effiziente Simulation für geeignete Parameterauswahl

Reduzierte Basis - Methoden sind eine Erweiterung für PDE Diskretisierungsverfahren (FEM, FV, LDG).

## Ziele

- Effiziente Simulation für geeignete Parameterauswahl, d.h.
- anwendbar auf **zeitkritische** Probleme und Probleme mit **hoher Parametervariation**.

Reduzierte Basis - Methoden sind eine Erweiterung für PDE Diskretisierungsverfahren (FEM, FV, LDG).

## Ziele

- Effiziente Simulation für geeignete Parameterauswahl, d.h.
- anwendbar auf **zeitkritische** Probleme und Probleme mit **hoher Parametervariation**.

Reduzierte Basis - Methoden sind eine Erweiterung für PDE Diskretisierungsverfahren (FEM, FV, LDG).

## Ziele

- Effiziente Simulation für geeignete Parameterauswahl, d.h.
- anwendbar auf **zeitkritische** Probleme und Probleme mit **hoher Parametervariation**.

## Beispiele

- Optimierung eines Bauteils bezüglich gewünschter Eigenschaften (viele Parameter: Geometrie, Material)
- Ferrari

- Unterteilung in zwei Phasen:

**Offline-Phase:** langsam, hochdimensional Lösungsraum, Verwendung bekannter Diskretisierungsverfahren

**Online-Phase:** schnell, niedrigdimensionaler Lösungsraum, Rechnung auf reduzierter Basis

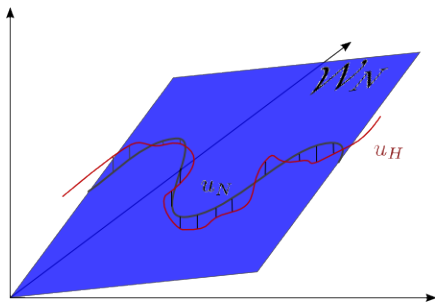


Abbildung: Schematische Darstellung



- Unterteilung in zwei Phasen:
  - **Offline-Phase:** langsam, hochdimensional Lösungsraum, Verwendung bekannter Diskretisierungsverfahren
  - **Online-Phase:** schnell, niedrigdimensionaler Lösungsraum, Rechnung auf reduzierter Basis
- In der **Offline**-Phase kann man Fehlerschätzer berechnen, mit denen man den maximalen Fehler des Verfahrens ermitteln kann.

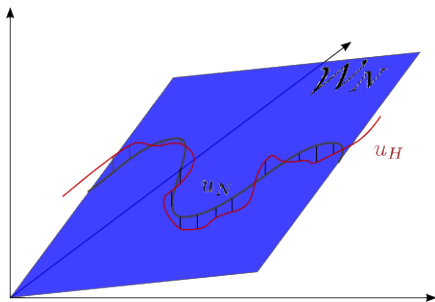


Abbildung: Schematische Darstellung

## Parametrisierte Evolutionsgleichungen

Seien  $\mu \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$ ,  $t \in [0, T]$ . Dann sind Funktionen  $u(\cdot, t; \mu) \in \mathcal{W} \subset L^2(\Omega)$  gesucht, d.d. die Gleichung

$$\partial_t u(\cdot, t; \mu) + \mathcal{L}(\mu, t)[u(\cdot, t; \mu)] = 0$$

bei geeigneten Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt ist.

## Parametrisierte Evolutionsgleichungen

Seien  $\mu \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$ ,  $t \in [0, T]$ . Dann sind Funktionen  $u(\cdot, t; \mu) \in \mathcal{W} \subset L^2(\Omega)$  gesucht, d.d. die Gleichung

$$\partial_t u(\cdot, t; \mu) + \mathcal{L}(\mu, t)[u(\cdot, t; \mu)] = 0$$

bei geeigneten Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt ist.

## Diskretisierung

- Zeitdiskretisierung:  $0 < t^0 < \dots < t^K = T$
- Diskretisierung von  $\mathcal{W}$  durch  $H$ -dimensionalen Raum  $\mathcal{W}_H \subset L^2(\Omega)$
- Vereinfachung: nur expliziter Diskretisierungsoperator  
 $\mathcal{L}_E^k(\mu) = \mathcal{L}_E(\mu, t^k) : \mathcal{W}_H \rightarrow \mathcal{W}_H$
- Gesucht sind die Vektoren  $u^k(\mu) \in \mathcal{W}_H$  für alle  $t^k$

## Beispiel: Finite Volumen Diskretisierung

$$u^0 := P[u_0(\cdot; \mu)] \quad (1)$$

$$\frac{1}{\Delta t^k} \left( u^{k+1}(\mu) - u^k(\mu) \right) + \mathcal{L}_E(\mu, t^k)[u^k(\mu)] = 0 \quad (2)$$

## Beispiel: Finite Volumen Diskretisierung

Der Diskretisierungsoperator ist **affin**, d.h.  $\mathcal{L}_E^k(\mu)[u] = \bar{\mathcal{L}}_E^k(\mu)[u] + b^k(\mu)$ . (Dabei sind in  $b^k(\mu)$  die Randbedingungen kodiert.)

$$u^0 := P[u_0(\cdot; \mu)] \quad (1)$$

$$\frac{1}{\Delta t^k} \left( u^{k+1}(\mu) - u^k(\mu) \right) + \mathcal{L}_E(\mu, t^k)[u^k(\mu)] = 0 \quad (2)$$

## Beispiel: Finite Volumen Diskretisierung

Der Diskretisierungsoperator ist **affin**, d.h.  $\mathcal{L}_E^k(\mu)[u] = \bar{\mathcal{L}}_E^k(\mu)[u] + b^k(\mu)$ . (Dabei sind in  $b^k(\mu)$  die Randbedingungen kodiert.)

Setze  $L_E^k(\mu)[u] = u - \Delta t^k \bar{\mathcal{L}}_E^k(\mu)[u]$ .

$$u^0 := P[u_0(\cdot; \mu)] \quad (1)$$

$$\frac{1}{\Delta t^k} \left( u^{k+1}(\mu) - u^k(\mu) \right) + \mathcal{L}_E(\mu, t^k)[u^k(\mu)] = 0 \quad (2)$$

## Beispiel: Finite Volumen Diskretisierung

Der Diskretisierungsoperator ist **affin**, d.h.  $\mathcal{L}_E^k(\mu)[u] = \bar{L}_E^k(\mu)[u] + b^k(\mu)$ . (Dabei sind in  $b^k(\mu)$  die Randbedingungen kodiert.)

Setze  $L_E^k(\mu)[u] = u - \Delta t^k \bar{L}_E^k(\mu)[u]$ .

$$u^0 := P[u_0(\cdot; \mu)] \quad (1)$$

$$u^{k+1} = L_E^k(\mu)[u^k] + \Delta t^k b_E^k(\mu) \quad (2)$$

- Übergang zu  $N$ -dimensionalem Vektorraum  $\mathcal{W}_N \subset \mathcal{W}_H \subset \mathcal{W}$  mit  $N \ll H$ .
- Finde dazu  $u_N^k(\cdot; \mu) \in \mathcal{W}_N$ , so dass für alle  $\varphi \in \mathcal{W}_N$

$$\int_{\Omega} \left( u_n^0 - P[u_0(\cdot; \mu)] \right) \varphi = 0$$

$$\int_{\Omega} \left( u_n^{k+1} - L_E^k[u_N^k] - b^k \right) \varphi = 0 \quad \text{gilt.}$$



- Übergang zu  $N$ -dimensionalem Vektorraum  $\mathcal{W}_N \subset \mathcal{W}_H \subset \mathcal{W}$  mit  $N \ll H$ .
- Finde dazu  $u_N^k(\cdot; \mu) \in \mathcal{W}_N$ , so dass für alle  $\varphi \in \mathcal{W}_N$

$$\int_{\Omega} \left( u_n^0 - P[u_0(\cdot; \mu)] \right) \varphi = 0$$

$$\int_{\Omega} \left( u_n^{k+1} - L_E^k[u_N^k] - \mathbf{b}^k \right) \varphi = 0 \quad \text{gilt.}$$

- Der naheliegende Ansatz  $u_N^k(\mu) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$  mit  $\mathbf{a}^k = (a_i^k)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$  führt zum Erfolg, denn dann gilt:

$$\mathbf{a}_n^0 := \int_{\Omega} P[u_0(\mu)] \varphi_n$$

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{L}_E^k(\mu) \mathbf{a}^k + \mathbf{b}^k(\mu)$$

- Der naheliegende Ansatz  $u_N^k(\mu) = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i$  mit  $\mathbf{a}^k = (a_i^k)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$  führt zum Erfolg, denn dann gilt:

$$\mathbf{a}_n^0 := \int_{\Omega} P[u_0(\mu)] \varphi_n$$

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{L}_E^k(\mu) \mathbf{a}^k + \mathbf{b}^k(\mu)$$

- Der naheliegende Ansatz  $u_N^k(\mu) = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i$  mit  $\mathbf{a}^k = (a_i^k)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$  führt zum Erfolg, denn dann gilt:

$$\mathbf{a}_n^0 := \int_{\Omega} P[u_0(\mu)] \varphi_n$$

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{L}_E^k(\mu) \mathbf{a}^k + \mathbf{b}^k(\mu)$$

- mit den entsprechenden Matrizen und Vektoren:

$$(\mathbf{L}_E^k(\mu))_{mn} := \int_{\Omega} \varphi_m L_E(\mu) [\varphi_n]$$

$$(\mathbf{b}^k)_n := \int_{\Omega} b^k(\mu) \varphi_n$$

- Der naheliegende Ansatz  $u_N^k(\mu) = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i$  mit  $\mathbf{a}^k = (a_i^k)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$  führt zum Erfolg, denn dann gilt:

$$\mathbf{a}_n^0 := \int_{\Omega} P[u_0(\mu)] \varphi_n$$

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{L}_E^k(\mu) \mathbf{a}^k + \mathbf{b}^k(\mu)$$

- mit den entsprechenden Matrizen und Vektoren:

$$(\mathbf{L}_E^k(\mu))_{mn} := \int_{\Omega} \varphi_m L_E(\mu) [\varphi_n]$$

$$(\mathbf{b}^k)_n := \int_{\Omega} b^k(\mu) \varphi_n$$

- $\Phi_N = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  heißt dann **reduzierte Basis**.

- Der naheliegende Ansatz  $u_N^k(\mu) = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i$  mit  $\mathbf{a}^k = (a_i^k)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$  führt zum Erfolg, denn dann gilt:

$$\mathbf{a}_n^0 := \int_{\Omega} P[u_0(\mu)] \varphi_n$$

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{L}_E^k(\mu) \mathbf{a}^k + \mathbf{b}^k(\mu)$$

- mit den entsprechenden Matrizen und Vektoren:

$$(\mathbf{L}_E^k(\mu))_{mn} := \int_{\Omega} \varphi_m L_E(\mu) [\varphi_n]$$

$$(\mathbf{b}^k)_n := \int_{\Omega} b^k(\mu) \varphi_n$$

- $\Phi_N = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  heißt dann **reduzierte Basis**.
- *Fragen:*
  - Wie trennt man die Rechnungen in  $\mathcal{W}_H$  und  $\mathcal{W}_N$ ?
  - Wie wählt man die reduzierte Basis sinnvoll?

## Wie trennt man die Rechnungen in $\mathcal{W}_H$ und $\mathcal{W}_N$ ?

- Um eine geeignete Offline-Online Zerlegung durchführen zu können, machen wir die Annahme, dass sich die Operatoren folgendermaßen in endliche Summen von Produkten parameter-abhängiger und -unabhängiger Funktionen zerlegen lassen:

$$L_E^k(\mu)[u] = \sum_{q=0}^{Q_{L_E}} \underbrace{L_E^{q,k}[u]}_{\text{parameter - unabhängig}} \underbrace{\sigma_E^{q,k}(\mu)}_{\text{unabhängig von } u} \quad b^k(x, \mu) = \sum_{q=0}^{Q_b} b^{k,q}(x) \sigma_b^{k,q}(\mu)$$

$$P[u_0(\mu)] = \sum_{q=0}^{Q_P} P^q[u_0] \sigma_P^q(\mu)$$

## Wie trennt man die Rechnungen in $\mathcal{W}_H$ und $\mathcal{W}_N$ ?

- Um eine geeignete Offline-Online Zerlegung durchführen zu können, machen wir die Annahme, dass sich die Operatoren folgendermaßen in endliche Summen von Produkten parameter-abhängiger und -unabhängiger Funktionen zerlegen lassen:

$$L_E^k(\mu)[u] = \sum_{q=0}^{Q_E} \underbrace{L_E^{q,k}[u]}_{\text{parameter-unabhängig}} \underbrace{\sigma_E^{q,k}(\mu)}_{\text{unabhängig von } u} \quad b^k(x, \mu) = \sum_{q=0}^{Q_b} b^{k,q}(x) \sigma_b^{k,q}(\mu)$$

$$P[u_0(\mu)] = \sum_{q=0}^{Q_P} P^q[u_0] \sigma_P^q(\mu)$$

- Die Bedingung für die Projektion lässt sich auch auf eine äquivalente Zerlegung der Anfangsdaten

$$u_0(x; \mu) = \sum_{q=0}^{Q_P} u_0^q(x) \sigma_{u_0}(\mu)$$

zurückführen.

## Fortsetzung: Wie trennt man die Rechnungen in $\mathcal{W}_H$ und $\mathcal{W}_N$ ?

Diese Trennung kann man jetzt auch auf die diskretisierten Operatoren im niedrigdimensionalen Lösungsraum  $\mathcal{W}_N$  übertragen.

Aus

$$(\mathbf{L}_E^k(\mu))_{mn} := \int_{\Omega} \varphi_m L_E(\mu)[\varphi_n]$$

$$(\mathbf{b}^k)_n := \int_{\Omega} \mathbf{b}^k(\mu) \varphi_n$$

und

$$\mathbf{a}_n^0 := \int_{\Omega} P[u_0(\mu)] \varphi_n$$

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{L}_E^k(\mu) \mathbf{a}^k + \mathbf{b}^k(\mu) \quad \dots$$



## Fortsetzung: Wie trennt man die Rechnungen in $\mathcal{W}_H$ und $\mathcal{W}_N$ ?

Diese Trennung kann man jetzt auch auf die diskretisierten Operatoren im niedrigdimensionalen Lösungsraum  $\mathcal{W}_N$  übertragen.

... wird

$$\mathbf{L}_E^k(\mu) = \sum_{q=0}^{Q_{LE}} \mathbf{L}_E^{k,q} \sigma_{L_E^q}(\mu) \quad \text{mit} \quad (\mathbf{L}_E^{k,q})_{mn} = \int_{\Omega} \varphi_m L_E^q[\varphi_n]$$

$$\mathbf{b}^k = \sum_{q=0}^{Q_b} \mathbf{b}_E^{k,q} \sigma_b^q(\mu) \quad \text{mit} \quad (\mathbf{b}^{k,q})_n = \int_{\Omega} \mathbf{b}^{k,q} \varphi_n$$

und

$$\mathbf{a}^0 = \sum_{q=0}^{Q_P} \mathbf{a}^{0,q} \sigma_P(\mu)$$

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{L}_E^k(\mu) \mathbf{a}^k + \mathbf{b}^k(\mu) \quad .$$

## Wie wählt man die reduzierte Basis sinnvoll?

- Wie bereits erwähnt, kann ein **a-posteriori**-Fehlerschätzer  $\Delta_N^k(\mu)$  aus Basiselementen von  $\mathcal{W}_N$  errechnet werden, d.d.

$$\|u_N^k(\mu) - u_H^k(\mu)\| \leq \Delta_N^k(\mu) \quad \text{gilt.}$$

## Wie wählt man die reduzierte Basis sinnvoll?

- Wie bereits erwähnt, kann ein **a-posteriori**-Fehlerschätzer  $\Delta_N^k(\mu)$  aus Basiselementen von  $\mathcal{W}_N$  errechnet werden, d.d.

$$\|u_N^k(\mu) - u_H^k(\mu)\| \leq \Delta_N^k(\mu) \quad \text{gilt.}$$

- Für eine vorher bestimmte endliche Teilmenge  $M \subset \mathcal{P}$  lässt sich also die Basis so lange erweitern, bis der maximaler Fehler kleiner als  $\varepsilon$  ist.

## Wie wählt man die reduzierte Basis sinnvoll?

- Wie bereits erwähnt, kann ein **a-posteriori**-Fehlerschätzer  $\Delta_N^k(\mu)$  aus Basiselementen von  $\mathcal{W}_N$  errechnet werden, d.d.

$$\|u_N^k(\mu) - u_H^k(\mu)\| \leq \Delta_N^k(\mu) \quad \text{gilt.}$$

- Für eine vorher bestimmte endliche Teilmenge  $M \subset \mathcal{P}$  lässt sich also die Basis so lange erweitern, bis der maximaler Fehler kleiner als  $\varepsilon$  ist.
- Geschickte Erweiterung z.B. mit PCA (Principal Component Analysis).

## Wie wählt man die reduzierte Basis sinnvoll?

- Wie bereits erwähnt, kann ein **a-posteriori**-Fehlerschätzer  $\Delta_N^k(\mu)$  aus Basiselementen von  $\mathcal{W}_N$  errechnet werden, d.d.

$$\|u_N^k(\mu) - u_H^k(\mu)\| \leq \Delta_N^k(\mu) \quad \text{gilt.}$$

- Für eine vorher bestimmte endliche Teilmenge  $M \subset \mathcal{P}$  lässt sich also die Basis so lange erweitern, bis der maximaler Fehler kleiner als  $\varepsilon$  ist.
- Geschickte Erweiterung z.B. mit PCA (Principal Component Analysis).

# Eine Erweiterung für allgemeineren lokalisierten Operator $\mathcal{L}_E$

*Ziel:* Approximation von  $\mathcal{L}_E(\mu, t^k)[u](x)$  durch einen affinen Operator in einem sog. „kollateralen reduzierten Basis-Raum“  $\mathcal{W}_M := \text{span}\{\mathcal{L}_E(\mu_i, t^{k_i})[u_H^{k_i}] | i = 1 \dots M\}$

## Eine Erweiterung für allgemeineren lokalisierten Operator $\mathcal{L}_E$

*Ziel:* Approximation von  $\mathcal{L}_E(\mu, t^k)[u](x)$  durch einen affinen Operator in einem sog. „kollateralen reduzierten Basis-Raum“  $\mathcal{W}_M := \text{span}\{\mathcal{L}_E(\mu_i, t^{k_i})[u_H^{k_i}] \mid i = 1 \dots M\}$

### Definition

- Wir betrachten in  $\mathcal{W}_M$  eine nodale Basis, d.h. zu  $M$  Punkten  $\{x_m\}_{m=1}^M$  gibt es jeweils Funktionen  $\Xi_M := \{\xi_m\}_{m=1}^M$  mit  $\xi_i(x_j) = \delta_{ij}$ .  
 $\Xi_M$  heißt kollaterale reduzierte Basis.

## Eine Erweiterung für allgemeinere lokalisierten Operator $\mathcal{L}_E$

*Ziel:* Approximation von  $\mathcal{L}_E(\mu, t^k)[u](x)$  durch einen affinen Operator in einem sog. „kollateralen reduzierten Basis-Raum“  $\mathcal{W}_M := \text{span}\{\mathcal{L}_E(\mu_i, t^{k_i})[u_H^{k_i}] | i = 1 \dots M\}$

### Definition

- Wir betrachten in  $\mathcal{W}_M$  eine nodale Basis, d.h. zu  $M$  Punkten  $\{x_m\}_{m=1}^M$  gibt es jeweils Funktionen  $\Xi_M := \{\xi_m\}_{m=1}^M$  mit  $\xi_i(x_j) = \delta_{ij}$ .  $\Xi_M$  heißt kollaterale reduzierte Basis.
- Dann lässt sich  $\mathcal{L}_E$  folgendermaßen interpolieren:

$$\mathcal{I}_M[\mathcal{L}_E(\mu, t^k)[u]] := \sum_{m=1}^M y_m(\mu, t^k) \xi_m(x),$$

$$\text{mit } y_m(\mu, t^k) := \mathcal{L}_E(\mu, t^k)[u](x_m)$$

Der Operator  $\mathcal{I}_M$  heißt **Empirische Interpolation**.



## Eine Erweiterung für allgemeinere lokalisierten Operator $\mathcal{L}_E$

*Ziel:* Approximation von  $\mathcal{L}_E(\mu, t^k)[u](x)$  durch einen affinen Operator in einem sog. „kollateralen reduzierten Basis-Raum“  $\mathcal{W}_M := \text{span}\{\mathcal{L}_E(\mu_i, t^{k_i})[u_H^{k_i}] | i = 1 \dots M\}$

### Definition

- Wir betrachten in  $\mathcal{W}_M$  eine nodale Basis, d.h. zu  $M$  Punkten  $\{x_m\}_{m=1}^M$  gibt es jeweils Funktionen  $\Xi_M := \{\xi_m\}_{m=1}^M$  mit  $\xi_i(x_j) = \delta_{ij}$ .  
 $\Xi_M$  heißt kollaterale reduzierte Basis.
- Dann lässt sich  $\mathcal{L}_E$  folgendermaßen interpolieren:

$$\mathcal{I}_M[\mathcal{L}_E(\mu, t^k)[u]] := \sum_{m=1}^M y_m(\mu, t^k) \xi_m(x),$$

$$\text{mit } y_m(\mu, t^k) := \mathcal{L}_E(\mu, t^k)[u](x_m)$$

Der Operator  $\mathcal{I}_M$  heißt **Empirische Interpolation**.

$\Xi_M$  wird ähnlich wie die reduzierte Basis mit einem iterativen Verfahren erstellt, und so lange erweitert, bis eine gewisse Qualität erreicht wird.

# Strömungen in porösen Medien

## Richardsgleichung

$$\partial_t \Theta(\psi) - \nabla \cdot K(\Theta) \nabla (\psi + z) = 0$$

- $\psi$  entspricht dem Druck
- $\Theta$  entspricht der Sättigung
- $K$  entspricht der Durchlässigkeit des Mediums
- $z$  ist die vertikale Höhe

Zwischen den Größen  $K$ ,  $\Theta$  und  $\psi$  bestehen feste physikalische Beziehungen, so dass man eine primäre Unbekannte frei wählen kann.

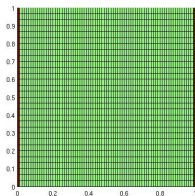
# Finite Volumen Diskretisierung mit verschiedenen Anfangsdaten

(mittlere Sättigung)

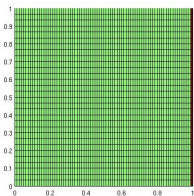
(starke Sättigung)

mittlere Sättigung

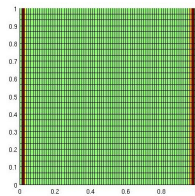
starke Sättigung



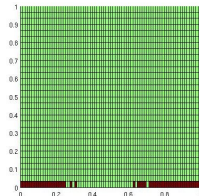
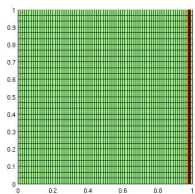
Basisfunktion 1



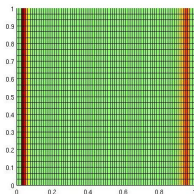
Basisfunktion 2



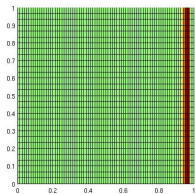
Basisfunktion 3

Interpolationspunkte  $x_m$ 

Basisfunktion 4



Basisfunktion 5



Basisfunktion 6

# Literatur



B. Haasdonk, M. Ohlberger, G. Rozza *A reduced basis method for evolution schemes with parameter-dependent explicit operators*, Preprint 09/07 - N, FB 10 , Universität Münster (2007).



B. Haasdonk, M. Ohlberger, *Reduced basis method for finite volume approximations of parametrized evolution equations*, Preprint 12/06



<http://augustine.mit.edu>,