Parallelisierung durch Gebietszerlegung

Jahn Müller
jahn.mueller@uni-muenster.de

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

25.01.2008

Einleitung

- es gibt viele Probleme in der Bildverarbeitung deren Lösung viel Rechenaufwand benötigen
- z.B.: Entrauschen, Entzerren, usw. von hochaufgelösten Bilder in 2D oder sogar 3D
- Interesse an schnellen Lösungs-Algorithmen
- Möglichkeit:
  - Aufteilung des Problems in mehrere Teilprobleme
  - Parallele Lösung der Teilprobleme
  - Zusammensetzung zu Gesamtlösung

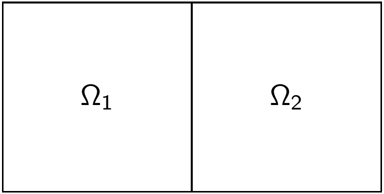
Gebietszerlegung
nicht überlappende Zerlegung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$:
Zerlege Ω in N Teilgebiete Ω_i, so dass

$$\bigcup_{i=1}^{N} \bar{\Omega}_i = \bar{\Omega}$$

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{für} \quad i \neq j$$

Beispiel: $N = 2$ und $d = 2$



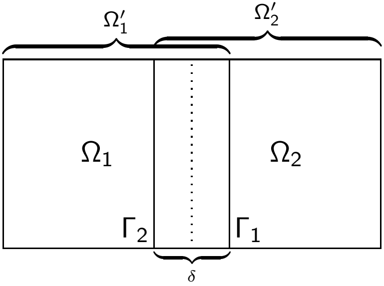
Gebietszerlegung
überlappende Zerlegung

erweitere Ω_i zu Ω_i', wobei Ω_i' am Rand von Ω abgeschnitten wird.

$$d(\partial\Omega_i' \cap \Omega_j, \partial\Omega_j' \cap \Omega_i) \geq \delta \quad \text{für } i \neq j \text{ und } \partial\Omega_i' \cap \Omega_j \neq \emptyset$$

bei einem uniformen Gitter mit Gittergröße h ist $\delta = n * h$ mit einem $n \in \mathbb{N}$

Beispiel: $N = 2$ und $d = 2$



Gebietszerlegung bei PDE's

- Zerlege Ω in N Teilgebiete Ω_i
- löse auf jedem Ω_i die gegebene PDE
  Randbedingungen werden benötigt:
  - auf $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$: gegebene Randbedingungen
  - auf $\partial\Omega_i \cap \Omega_j$: hier werden Näherungen des Nachbargebietes Ω_j benötigt.
    Diese Abhängigkeit ist symmetrisch:

    $\Rightarrow$ Gebietszerlegungsmethoden sind iterative Verfahren

- die ursprüngliche Lösung erhält man durch zusammensetzen der Teillösungen

Gebietszerlegung

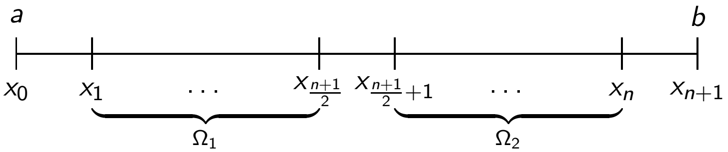
Beispiel: Poisson Gleichung

Poisson Gleichung in 1D:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) \quad x \in \,]a, b[$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

Diskretisierung:



Mit $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$, ist eine uniforme Unterteilung möglich (ebenso für die Erweiterung auf $2^j, j \in \mathbb{N}$, Gebiete)

Gebietszerlegung
Beispiel: Poisson Gleichung

Beginnend mit Anfangswert $u^{(0)}$ (z.B.: $u^{(0)} = 0$) iteriert man

$$\begin{cases} Au_1^{(k+1)} = f, & \text{in } \Omega_1 \\ u_1^{(k+1)} = u^{(k)} & \text{für } x_{\frac{n+1}{2}+1} \\ u_1^{(k+1)} = 0, & \text{für } x_0 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\begin{cases} Au_2^{(k+1)} = f, & \text{in } \Omega_2 \\ u_2^{(k+1)} = u_1^{(k+1)} & \text{für } x_{\frac{n+1}{2}} \\ u_2^{(k+1)} = 0, & \text{für } x_{n+1} \end{cases}$$

Der nächste Schritt ergibt sich dann aus

$$u^{(k+1)}(x) = \begin{cases} u_2^{(k+1)}(x), & \text{falls } x \in \Omega_2 \\ u_1^{(k+1)}(x), & \text{falls } x \in \Omega \setminus \Omega_2 \end{cases}$$

Gebietszerlegung

Beispiel: Poisson Gleichung

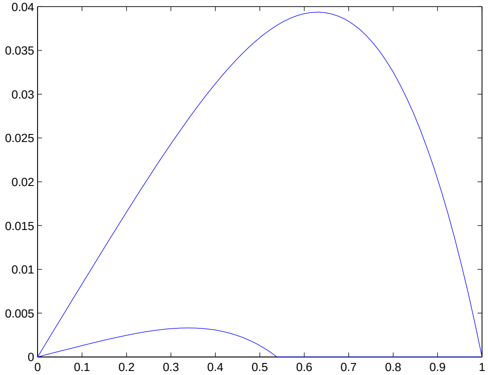


Abbildung: Lsg. der Poisson Gleichung mit $f(x) = x^2$ auf $[0, 1]$

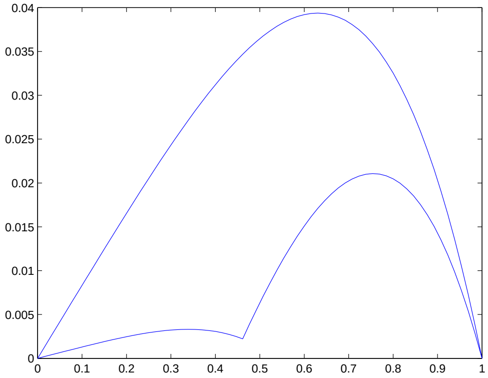


Abbildung: Lsg. der Poisson Gleichung mit $f(x) = x^2$ auf $[0, 1]$

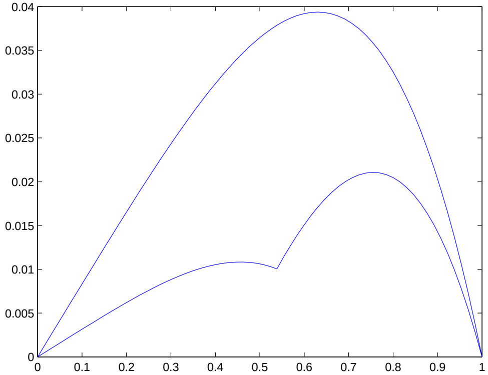


Abbildung: Lsg. der Poisson Gleichung mit $f(x) = x^2$ auf $[0, 1]$

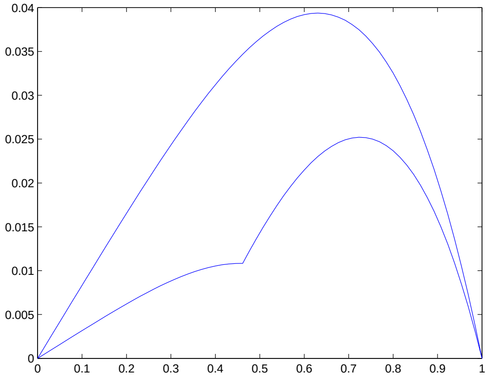


Abbildung: Lsg. der Poisson Gleichung mit $f(x) = x^2$ auf $[0, 1]$

Multiplikative Schwarz Methode

Beginnend mit Anfangswert $u^{(0)}$ iteriert man

$$\begin{cases} Lu_1^{(k+1)} = f, & \text{in } \Omega_1 \\ u_1^{(k+1)} = u^{(k)}{}_{|\Gamma_1}, & \text{auf } \Gamma_1 \\ u_1^{(k+1)} = 0, & \text{auf } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1 \end{cases} \qquad \text{und}$$

$$\begin{cases} Lu_2^{(k+1)} = f, & \text{in } \Omega_2 \\ u_2^{(k+1)} = u_1^{(k+1)}{}_{|\Gamma_2}, & \text{auf } \Gamma_2 \\ u_2^{(k+1)} = 0, & \text{auf } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2 \end{cases}$$

Der nächste Schritt ergibt sich dann aus

$$u^{(k+1)}(x) = \begin{cases} u_2^{(k+1)}(x), & \text{falls } x \in \Omega_2 \\ u_1^{(k+1)}(x), & \text{falls } x \in \Omega \setminus \Omega_2 \end{cases}$$

Parallelisierung

Ordne jedem Teilgebiet einen Prozessor zu:

$\Rightarrow$ gleichzeitige Berechnung möglich

Problem:

Datenaustausch zwischen Prozessoren erforderlich!
(Randbedingungen werden von Nachbargebiet benötigt, s.o.)
Realisierung z.B. durch MPI (Message Passing Interface)

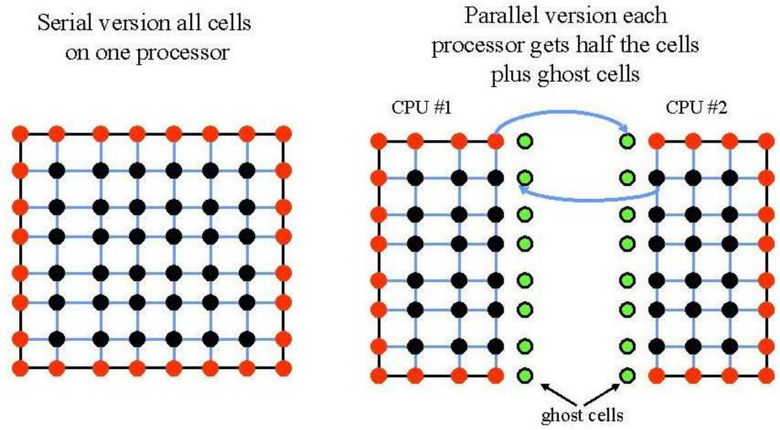
Wichtiger Parameter: δ

je größer δ desto:

$+$ weniger Iterationen

\- mehr Operationen pro Iteration

\- mehr Speicher


Serial version all cells on one processor
Parallel version each processor gets half the cells plus ghost cells
CPU #1
CPU #2
ghost cells

Anwendung für EM-TV

Problemstellung

Zweiter Halbschritt im EM-TV Algorithmus:

$$u^{k+1} = argmin_{u \in BV} \int_{\Omega} \frac{\left(u - u_{k+\frac{1}{2}}\right)^2}{u_k} dx + 2\alpha |u|_{TV}(\Omega)$$

mit

$$BV(\Omega) := \{u \in L^1(\Omega) \,|\, |u|_{TV} < \infty\} \tag{1}$$

dem Raum der Funktionen mit beschränkter Variation, und

$$|u|_{TV}(\Omega) := \sup_{\substack{\varphi \in C^1_{loc}(\Omega)^d \\ ||\varphi||_\infty \leq 1}} \int_{\Omega} u div\varphi dx \tag{2}$$

der totalen Variation von u, für $u \in W^{1,1}(\Omega)$ ist

$$|u|_{TV}(\Omega) := \int_{\Omega} |\nabla u| dx \tag{3}$$

Anwendung für EM-TV

Problemstellung

Wir wollen also folgendes Funktional minimieren:

$$\mathcal{J}(u) := \int_\Omega \frac{(u-f)^2}{\hat{u}} dx + 2\alpha |u|_{TV}(\Omega) \tag{4}$$

- Lösungen können unstetig sein
- Unstetigkeiten können auf den Schnittstellen der Gebietszerlegung liegen

$\Rightarrow$ Algorithmus gesucht, der Unstetigkeiten an Schnittstellen erhält, aber auch stetige Bereiche richtig behandelt

Lösungsmethoden

Primale Lösungsmethoden:

- erste Optimalitätsbedingung für ein Minimum von (4) liefert:

$$\frac{u-f}{\hat{u}} - \alpha\nabla\cdot\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0$$

- um Differenzierbarkeit zu erreichen verwendet man statt (3)

$$|u|_{TV,\varepsilon}(\Omega) := \int_\Omega \sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2}\, dx$$

  - ε groß: Kanten werden verschmiert
  - ε klein: PDE fast degeneriert

Lösungsmethoden

Duale Lösungsmethoden:

- Löse das duale Problem:

$$\int_\Omega (\alpha \hat{u} \nabla \cdot p - f)^2 dx \rightarrow \min_{||p||_\infty \leq 1}$$

Vorteil:	quadratisches Funktional (differenzierbar)
Nachteil:	Nebenbedingung

- Lösung über notwendige Optimalitätsbedingungen (Karush-Kuhn-Tucker)

Lösungsmethoden

Primal-Duale Lösungsmethoden:

- Finde u und g mit $||g||_\infty \leq 1$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}\frac{u-f}{\hat{u}} + \nabla \cdot g &= 0 && (5) \\ \int_\Omega u \nabla \cdot (g - \varphi) dx &\geq 0 \quad \forall \varphi \text{ mit } ||\varphi||_\infty \leq 1 && (6) \end{aligned}$$

- wobei man (6) als Bedingung $\nabla \cdot g \in \partial |u|_{TV}$ auffassen kann, mit

$$\partial \mathcal{J}(u) = \{w \in X^* | \langle w, u - v \rangle \leq \mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) \quad \forall v \in X\}$$

dem Subgradienten von $J : X \to \mathbb{R}$

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!

Ski Heil!!!