

EM-TV Methoden bei der Bildrekonstruktion

Christoph Brune, Alex Sawatzky
Martin Burger



Institut für Numerische und Angewandte
Mathematik

Skiseminar Zaferna-Hütte Kleinwalsertal, 2008

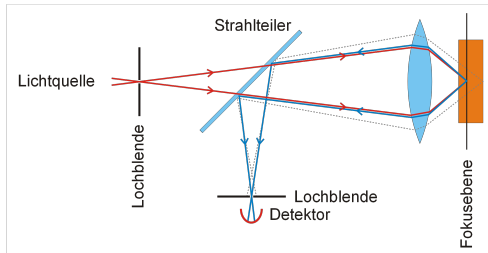


Outline

- 1 Einführung
 - Optische Nanoskopie und Massenspektrometrie
 - Positronen-Emissions-Tomographie
- 2 EM mit TV-Regularisierung
 - EM-Algorithmus
 - EM-TV
- 3 EM-TV mit Kontrastkorrektur
 - EM - (Iteratives-TV)
 - Iteratives EM-TV
- 4 Ausblick

Konfokalmikroskopie

- Konvokalmikroskop ist Variante eines Lichtmikroskopes

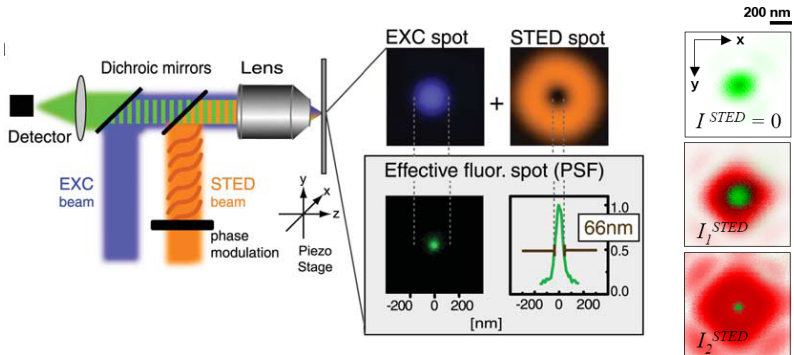


- Auflösung ist begrenzt durch Beugung des Lichtes (Abbesche Beugungsgrenze)
- Bei blauem Licht max. 200nm lateral und 500nm axial



STED-Mikroskop

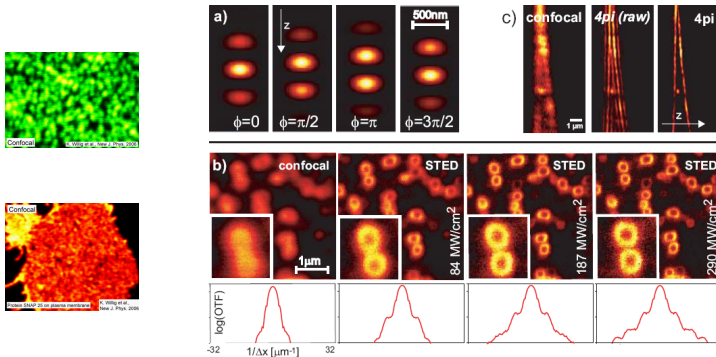
- Stimulated Emission Depletion



- Fluoreszenz durch fokussierten Laserstrahl; Anregung + Abregung

Optische Nanoskopie in bislang unbekannter Schärfe

- Beugungsgrenze mit STED-4Pi "praktisch" unterschritten



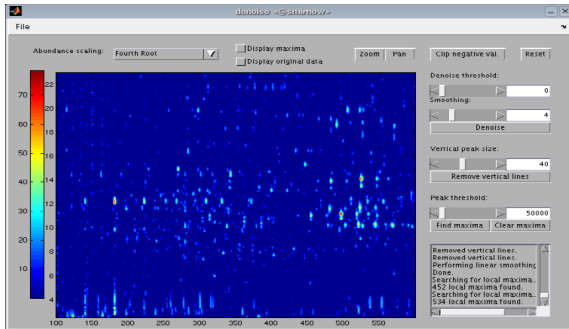
- Zusammenhang zw. Granularität, Faltungskern und Laserintensität

INVERS: Entfaltungsprobleme mit Sparsity Constraints

- BMBF-Verbundprojekt zum Programm: Mathematik für Innovation in Industrie und Dienstleistungen
- Kooperation von wissenschaftlicher Seite
 - Uni Göttingen (Hohage, Munk)
 - Uni Bochum (Bissantz)
 - Uni Bremen (Maaß)
 - Max-Planck-Institut für biophysikalische Chemie Göttingen (Hell)
- Industriepartner
 - Leica Microsystems CMS GmbH
 - Bruker Daltonik GmbH (Massenspektrometrie)

Massenspektrometrie

- MS ist Verfahren zur Bestimmung des Masse-zu-Ladung Verhältnisses m/q
- 2D-MALDI-MS-Spektrum



Entfaltungsprobleme mit Sparsity Constraints

- Gegeben: Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$, gemessene Daten, d.h. Bild einer Probe aus STED-Mikroskop

Funktion $h : \Omega \rightarrow [0, 1]$, Faltungskern (PSF)

Eigenschaften:

- Nanoskopie sowie Massenspektrometrie liefern **gefaltete** Bilder
- **Poisson**-gestört
- Bilder sind **sparse**, bzw. besitzen sparse Strukturen

Entfaltungsprobleme mit Sparsity Constraints

- Gesucht: Funktion $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$, als Lösung der Integralgleichung:

$$f = \wp(Ku + b) \quad (\text{Inverses Problem})$$

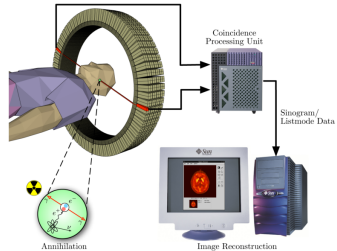
$$\text{wobei } Ku(x) = (h * u)(x) = \int_{\Omega} h(x - \tau)u(\tau)d\tau$$

und \wp Poisson-Noise

- Zusätzliches Hintergrundrauschen b durch Apparatur
- Blind deconvolution bei parametrisierten Faltungskernen

Positronen-Emissions-Tomographie

PET ist ein bildgebendes Verfahren der Nuklearmedizin



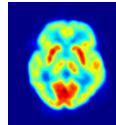
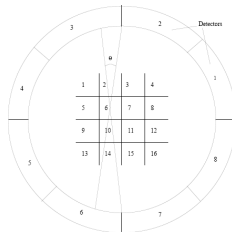
- Verteilung einer schwach radioaktiv markierten Substanz (Radiopharmakon) wird im Organismus sichtbar gemacht
- Abbildung biochemischer und physiologischer Vorgänge, z.B. Rückschlüsse auf Stoffwechsel

Positronen-Emissions-Tomographie

Radioaktiver Zerfall lässt sich durch Poisson-Prozess beschreiben

$$f = \varphi(Au) \quad (\text{Inverses Problem})$$

- Linearer Operator A enthält Informationen zur Apparatur
- a_{ij} , $i \in \{1, \dots, D\}$, $j \in \{1, \dots, m \cdot n\}$ Wahrscheinlichkeit, dass i -tes Detektorpaar an j -ter Stelle der Probe Zerfall feststellt



EM-Algorithmus

- Stochastische Modellierung
- Expectation-Maximization Algorithmus der Statistik
Formulierung als Zufallsexperiment

$$f = \wp(Ku + b), \quad \text{wobei } Ku = h * u$$

gesucht: $\hat{u} = \arg \max_u p(u|f)$

- Anwendung der Maximum-Likelihood-Methode

Maximum-Likelihood Ansatz

Für die aposteriori Wahrscheinlichkeit gilt:

$$p(u | f) = \frac{p(f | u) p(u)}{\underbrace{p(f)}_{=1}}, \quad \text{mit } p(u) = c_E \int e^{\beta E(u)} du \text{ (Gibbs)}$$

$$= \prod_{x \in \Omega} \mathbb{P}_\lambda(X = f), \quad \lambda = Ku \text{ (EW der Poisson-Vert.)}$$

$$= \prod_{x \in \Omega} \frac{Ku(x)^{f(x)}}{f(x)!} e^{-Ku(x)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{u} &= \arg \max_u p(u | f) = \arg \min_u \{-\log p(u | f)\} \\ &= \arg \min_u \left\{ \int_{\Omega} Ku - f \log Ku + \underbrace{f \log f}_{\text{unabhängig von } u} \right\} \end{aligned}$$

Variationsformulierung

$$\min_u \int_{\Omega} Ku - f \log Ku$$

- Notwendige Optimalitätsbedingung

$$K^*1 - K^*\left(\frac{f}{Ku}\right) = 0$$

wobei K^* adjungierter Operator

$$K^*u(x) = \int_{\Omega} h(\tau - x)u(\tau)d\tau$$

EM-Algorithmus

- Normiere K^* derart, dass $K^* 1 = 1$

$$1 - \frac{K^*}{K^* 1} \left(\frac{f}{Ku} \right) = 0$$

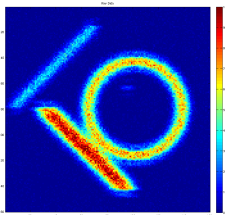
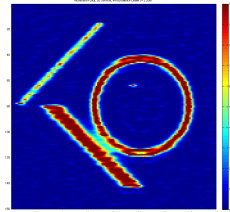
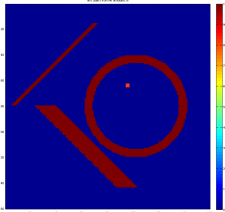
$$u \left(1 - \frac{K^*}{K^* 1} \left(\frac{f}{Ku} \right) \right) = 0$$

Lösen der Fixpunktgleichung $u = u \frac{K^*}{K^* 1} \left(\frac{f}{Ku} \right)$

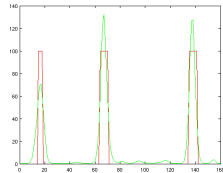
Wir erhalten Iterationsschema:

$$\boxed{u_{k+\frac{1}{2}} = u_k \frac{K^*}{K^* 1} \left(\frac{f}{Ku_k} \right)} \quad (EM - \text{Schritt})$$

Numerische Resultate Nanoskopie

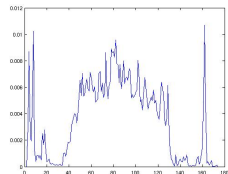
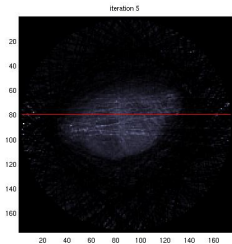


Gefaltet + Poisson-Noise

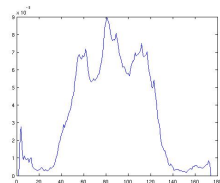
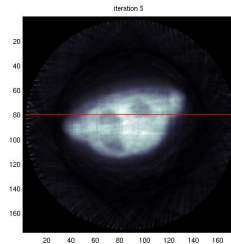


EM, KL-Distanz: 3.21

Numerische Resultate PET



schlechte Statistik
5 EM-Iterationen



5 EM-Iterationen

BV: Raum von Funktionen beschränkter TV

$$BV(\Omega) := \{u \in L^1(\Omega) \mid |u|_{BV} < \infty\}$$

$$|u|_{BV} := |Du|(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u| = \sup_{\substack{g \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2) \\ \|g\| \leq 1}} \int_{\Omega} u \operatorname{div} g$$

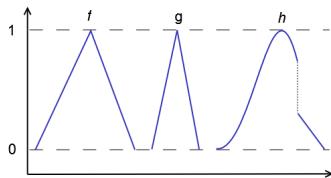


Figure: $|f|_{BV} = |g|_{BV} = |h|_{BV} = 2$

EM-Algorithmus mit TV-Regularisierung

$$\min_u \int_{\Omega} Ku - f \log Ku + \tilde{\alpha} \int_{\Omega} |\nabla u|, \quad \tilde{\alpha} > 0$$

- Notwendige Optimalitätsbedingung für eine Lösung u :

$$K^*1 - K^*\left(\frac{f}{Ku}\right) - \tilde{\alpha} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0$$

Normiere Operator K^* wie oben und erhalte $\alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{K^*1}$

$$1 - \frac{K^*}{K^*1}\left(\frac{f}{Ku}\right) + \alpha \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0$$
$$\Rightarrow u\left(1 - \frac{K^*}{K^*1}\left(\frac{f}{Ku}\right) + \alpha \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) = 0.$$

EM-Algorithmus mit TV-Regularisierung

$$\begin{aligned}
 u_{k+1} &= u_k \underbrace{\frac{K^*}{K^*1} \left(\frac{f}{Ku_k} \right)}_{= u_{k+\frac{1}{2}} \text{ (EM-Schritt)}} - \alpha u_k \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_{k+1}}{|\nabla u_{k+1}|} \right)
 \end{aligned}$$

Äquivalent zu Iterationsschritt ist ausgehend von $u_{k+\frac{1}{2}}$ (EM-Schritt) Lösung des Variationsproblems:

$$u_{k+1} = \arg \min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - u_{k+\frac{1}{2}})^2}{u_k} + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u| \right\}$$

- Beachte: Gewichtung des data-fidelity Terms mit Lsg. u_k des letzten TV-Variationsproblems

EM-Algorithmus mit TV-Regularisierung

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - u_{k+\frac{1}{2}})^2}{u_k} + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|$$

- Sei u Minimum von $J \Rightarrow J(u) \leq J(u + tv) := \phi(t) \quad \forall u \forall t \geq 0$

$$\phi(t) = J(u + tv) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u + tv - u_{k+\frac{1}{2}})^2}{u_k} + \alpha \int_{\Omega} |\nabla(u + tv)|$$

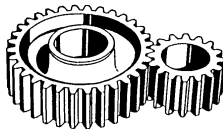
$$\Rightarrow \phi'(t) = \int_{\Omega} \frac{(u + tv - u_{k+\frac{1}{2}})}{u_k} v + \alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla(u + tv)}{|\nabla(u + tv)|} \nabla v$$

$$\stackrel{v \text{ bel.}}{\Rightarrow} \phi'(0) = \frac{u - u_{k+\frac{1}{2}}}{u_k} - \alpha \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0$$

Prinzip

- Verschachteltes EM-TV
- Nach jedem EM-Schritt gewichtetes Variationsproblem mit TV-Regularisierung

$$u_0 \xrightarrow{\text{EM-Schritt}} u_{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{TV-Problem}} u_1 \xrightarrow{\text{EM-Schritt}} u_{\frac{3}{2}} \longrightarrow \dots$$



TV-Variationsproblem und Dualität

$$\begin{aligned}
 u_{k+1} &= \arg \min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - u_{k+\frac{1}{2}})^2}{u_k} + \alpha \sup_{\substack{g \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2) \\ \|g\| \leq 1}} \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \right\} \\
 &= \arg \min_u \left\{ \sup_{\substack{g \in C_0^\infty \\ \|g\| \leq 1}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - u_{k+\frac{1}{2}})^2}{u_k} + \alpha \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \right\} \\
 &= \arg \sup_{\substack{g \in C_0^\infty \\ \|g\| \leq 1}} \underbrace{\left\{ \min_u \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - u_{k+\frac{1}{2}})^2}{u_k} + \alpha \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \right\}}_{\text{Notw. Optimalitätsbed. } u = u_{k+\frac{1}{2}} - \alpha u_k \operatorname{div} g}
 \end{aligned}$$

TV-Variationsproblem und Dualität

$$\begin{aligned}
 u_{k+1} &= \arg \sup_{\substack{g \in C_0^\infty \\ \|g\| \leq 1}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\alpha^2 u_k^2 (\operatorname{div} g)^2}{u_k} + \alpha \int_{\Omega} (u_{k+\frac{1}{2}} - \alpha u_k \operatorname{div} g) \operatorname{div} g \right\} \\
 &= \arg \inf_{\substack{g \in C_0^\infty \\ \|g\| \leq 1}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(\alpha u_k \operatorname{div} g - u_{k+\frac{1}{2}})^2}{u_k} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{u_{k+\frac{1}{2}}^2}{u_k}}_{\text{unabhängig von } g} \right\}
 \end{aligned}$$

TV-Variationsproblem und Dualität

$$\inf_{g \in C_0^\infty} J(g) := \int_{\Omega} \frac{(\alpha u_k \operatorname{div} g - u_{k+\frac{1}{2}})^2}{u_k} dx$$

unter $h(g) := |g(x)|^2 - 1 \leq 0$

Lagrange-Funktion: $\mathcal{L}(g, \lambda) = J(g) + \lambda h(g)$

Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen liefern Existenz eines Lagrange Multiplikators $\lambda \geq 0$ mit

$$\mathcal{L}_g(g, \lambda) := -\nabla(\alpha u_k \operatorname{div} g - u_{k+\frac{1}{2}}) + \lambda g = 0$$

$$\lambda \geq 0, \quad \lambda h(g) = 0$$

TV-Variationsproblem und Dualität

$$-\nabla(\alpha u_k \operatorname{div} g - u_{k+\frac{1}{2}}) + \lambda g = 0$$

wobei entweder $\lambda > 0 \wedge |g| = 1$ oder $|g| < 1 \wedge \lambda = 0$

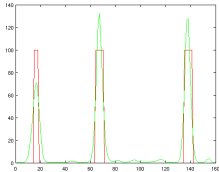
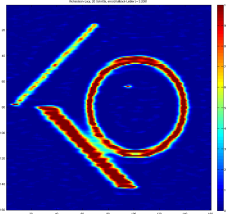
Im letzteren Fall gilt $\nabla(\alpha u_k \operatorname{div} g - u_{k+\frac{1}{2}}) = 0$

$$\Rightarrow \text{Lagrange-Multiplikator } \lambda = |\nabla(\alpha u_k \operatorname{div} g - u_{k+\frac{1}{2}})|$$

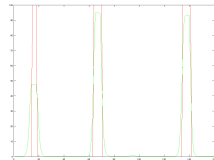
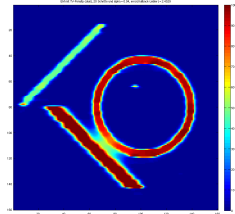
- Semiimplizites Gradientenabstiegsverfahren für $\tau > 0$:

$$g^{n+1} = \frac{g^n + \tau \nabla(\alpha u_k \operatorname{div} g^n - u_{k+\frac{1}{2}})}{1 + \tau |\nabla(\alpha u_k \operatorname{div} g^n - u_{k+\frac{1}{2}})|}$$

Numerische Resultate Nanoskopie

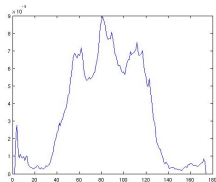
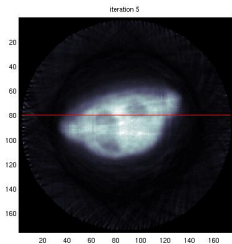


EM
KL-Distanz: 3.21

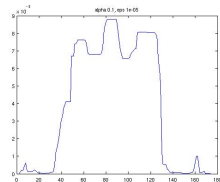
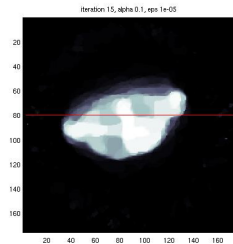


EM-TV, $\alpha = 0.04$
KL-Distanz: 2.45

Numerische Resultate PET



EM



EM-TV, $\alpha = 0.1$

Iterative Regularisierung

- Kontrastkorrektur bei EM-TV durch Bregman-Iteration und inverse Scale-Space-Methoden
- Umsetzung durch stückweise Verfeinerung
- **innere** Kontrastkorrektur: nach jedem EM-Schritt löse Folge von angepassten ROF-Funktionalen
- **äußere** Kontrastkorrektur: stückweise Verfeinerung außerhalb des EM-TV-Verfahrens; löse Folge von angepassten EM-TV-Problemen

Innere Kontrastkorrektur

- Bislang für $u_{k+\frac{1}{2}}$ aus EM-Schritt

$$u_{k+1} = \arg \min_u \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - u_{k+\frac{1}{2}})^2}{u_k}}_{=: H(u, u_{k+\frac{1}{2}})} + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u| \right\}$$

- Stattdessen Iteration bzgl. l

$$\begin{aligned} u_{l+1} &= \arg \min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - u_{k+\frac{1}{2}})^2}{u_k} + \alpha (|Du|(\Omega) - \langle p_l, u \rangle) \right\} \\ &= \arg \min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - u_{k+\frac{1}{2}})^2}{u_k} + \alpha \underbrace{(|Du|(\Omega) - |Du_l|(\Omega) - \int_{\Omega} p_l(u - u_l))}_{D(u, u_l) \text{ Bregman-Distanz}} \right\} \end{aligned}$$

Innere Kontrastkorrektur

- Euler-Lagrange: $0 \in \frac{u_{l+1} - u_{k+\frac{1}{2}}}{u_k} + \alpha \partial |u_{l+1}|_{BV} - \alpha p_l$
- Update von p_l :

$$\text{Subgradient } \partial_u H(u, u_{k+\frac{1}{2}}) = \frac{u - u_{k+\frac{1}{2}}}{u_k}$$

$$p_{l+1} = p_l - \frac{1}{\alpha} \partial_u H(u_{l+1}, u_{k+\frac{1}{2}}) = p_l - \frac{1}{\alpha} \frac{u_{l+1} - u_{k+\frac{1}{2}}}{u_k} \in \partial |u_{l+1}|_{BV}$$

Setzen wir $p_l := \frac{v_l}{\alpha u_k}$, so lautet Updateformel:

$$v_{l+1} = v_l + (u_{k+\frac{1}{2}} - u_{l+1})$$

Innere Kontrastkorrektur

- Erhalten damit das Funktional

$$\begin{aligned} u_{l+1} &= \arg \min_u \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - u_{k+\frac{1}{2}})^2 - 2uv_l}{u_k} + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u| \\ &= \boxed{\arg \min_u \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - (u_{k+\frac{1}{2}} + v_l))^2}{u_k} + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|} \end{aligned}$$

- Störung v_l des letzten ROF-Funktional wird wieder zum gestörten Ausgangsbild $u_{k+\frac{1}{2}}$ addiert

M.Burger, K.Frick, S.Osher, O.Scherzer, Inverse total variation flow, SIAM Multiscale Modelling and Simulation 6 (2007), 366-395.

Äußere Kontrastkorrektur

- EM-TV Funktional

$$\min_u \int_{\Omega} \underbrace{Ku - f \log Ku}_{=: H(u, f)} + \tilde{\alpha} \int_{\Omega} |\nabla u|$$

- Äußere schrittweise Verfeinerung iteriere über j
- Kennen wir p_j , so lösen wir

$$u_{j+1} = \arg \min_u \frac{1}{2} \int_{\Omega} Ku - f \log Ku + \tilde{\alpha} (|Du|(\Omega) - \langle p_j, u \rangle)$$

Äußere Kontrastkorrektur

- Euler-Lagrange: $0 \in K^*1 - K^*\left(\frac{f}{Ku_{j+1}}\right) + \alpha \partial|u_{j+1}|_{BV} - \alpha p_j$
- Update von p_j :

$$\text{Subgradient } \partial_u H(u, f) = K^*1 - K^*\left(\frac{f}{Ku}\right)$$

$$p_{j+1} = p_j - \frac{1}{\alpha} \partial_u H(u_{j+1}, f) = p_j - \frac{1}{\alpha} \left(K^*1 - K^*\left(\frac{f}{Ku_{j+1}}\right) \right) \in \partial|u_{j+1}|_{BV}$$

Setzen wir $p_j := \frac{v_j}{\alpha}$, so lautet Updateformel:

$$v_{j+1} = v_j + \left(K^*\left(\frac{f}{Ku_{j+1}}\right) - K^*1 \right)$$

Äußere Kontrastkorrektur

- Analog zu EM-TV zunächst EM-Schritt und dann mit $u_{k+\frac{1}{2}}$ angepasstes ROF-Funktional der Form:

$$\begin{aligned}u_{k+1} &= \arg \min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - u_{k+\frac{1}{2}})^2}{u_k} + \alpha (|Du|(\Omega) - \langle p_j, u \rangle) \right\} \\ &= \arg \min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - u_{k+\frac{1}{2}})^2}{u_k} + \alpha \underbrace{(|Du|(\Omega) - |Du_j|(\Omega) - \int_{\Omega} p_j(u - u_j))}_{D(u, u_j) \text{ Bregman-Distanz}} \right\}\end{aligned}$$

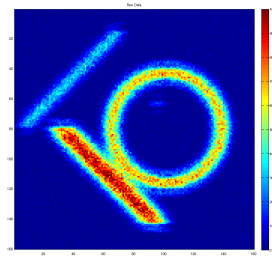
Äußere Kontrastkorrektur

- Erhalten damit das Funktional

$$u_{k+1} = \arg \min_u \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - u_{k+\frac{1}{2}})^2 - 2u_k u v_j}{u_k} + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|$$
$$= \boxed{\arg \min_u \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u - (u_{k+\frac{1}{2}} + u_k v_j))^2}{u_k} + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u| .}$$

M.Burger, E.Resmerita, L.He, Error estimation for Bregman iterations and inverse scale space methods in image restoration, Computing 81 (2007), 109-135.

Nanoskopie: Testobjekt



Nanoskopie: Testobjekt, EM-TV mit $\alpha = 0.04$

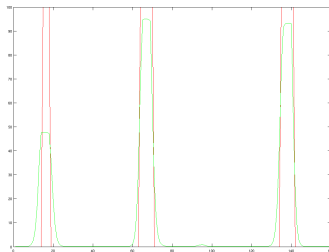
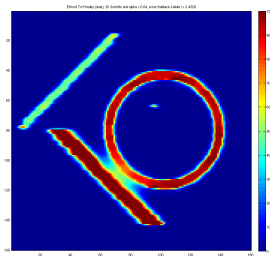


Figure: KL-Distanz: 2.45

Nanoskopie: Testobjekt, Iterative EM-TV

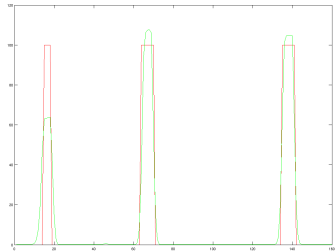
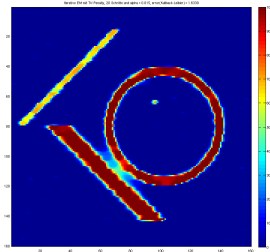
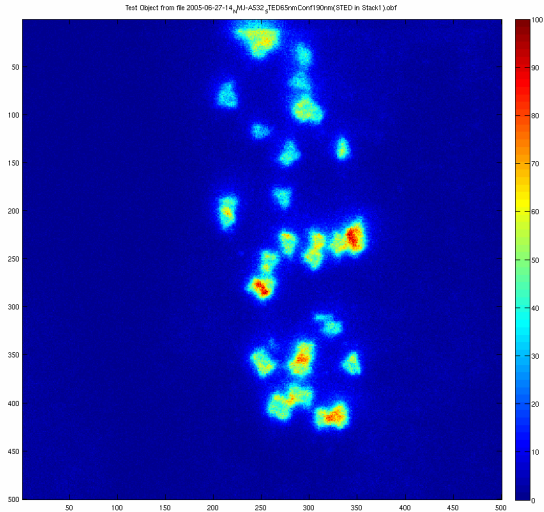
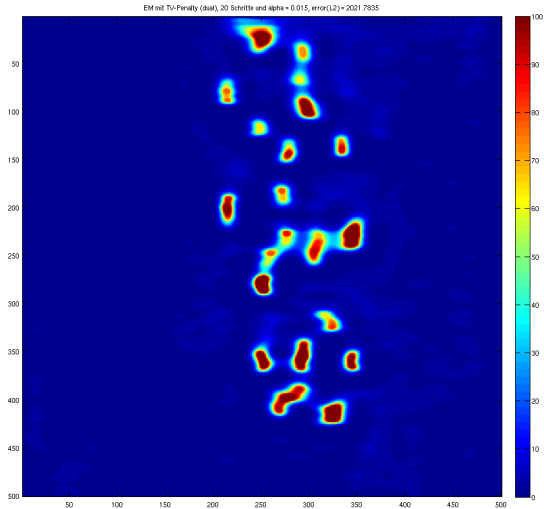


Figure: KL-Distanz: 1.63

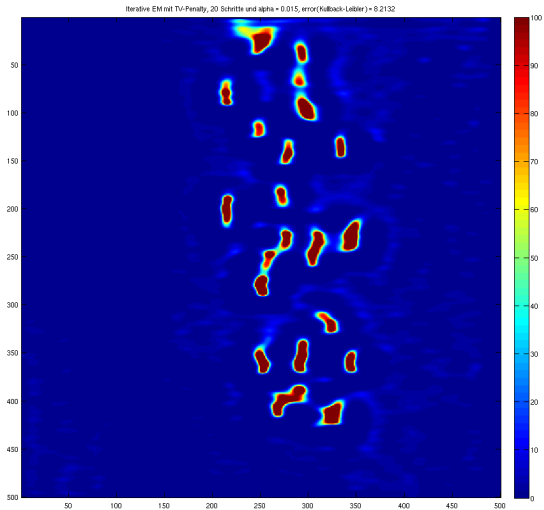
Nanoskopie: Neuromuscular Junction, 65nm



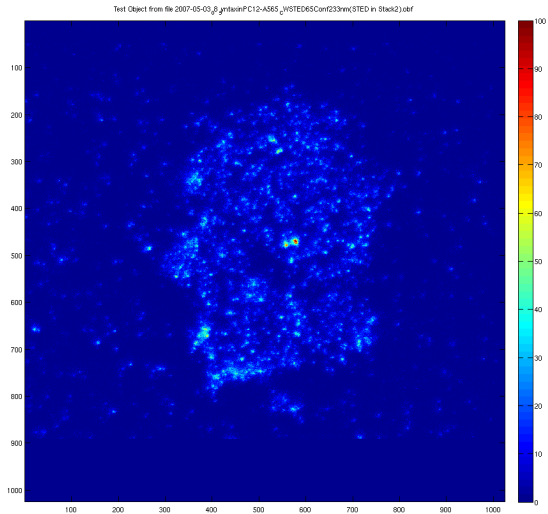
Nanoskopie: NMJ, EM-TV mit $\alpha = 0.015$



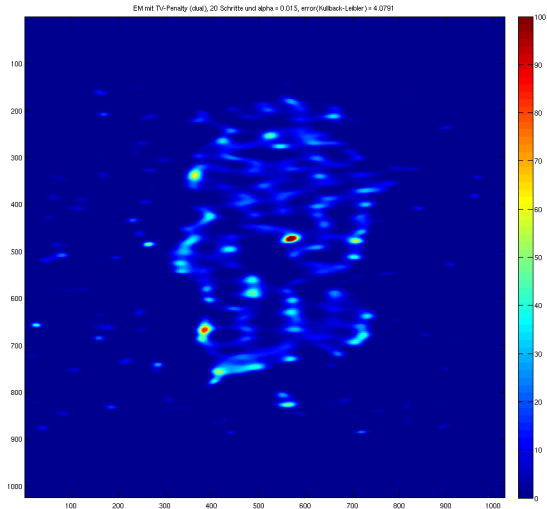
Nanoskopie: NMJ, Iterative EM-TV



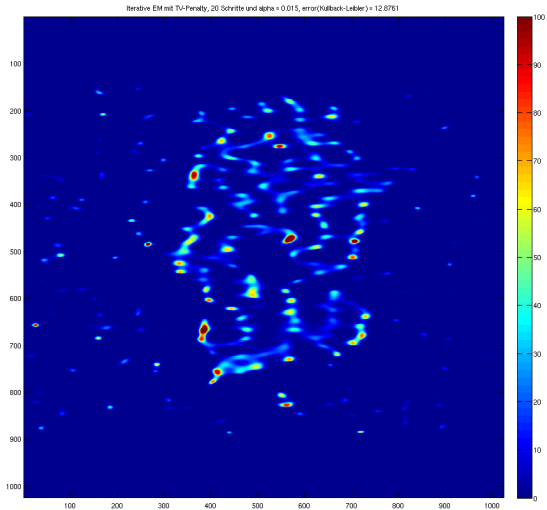
Nanoskopie: Syntaxin PC12, 53nm



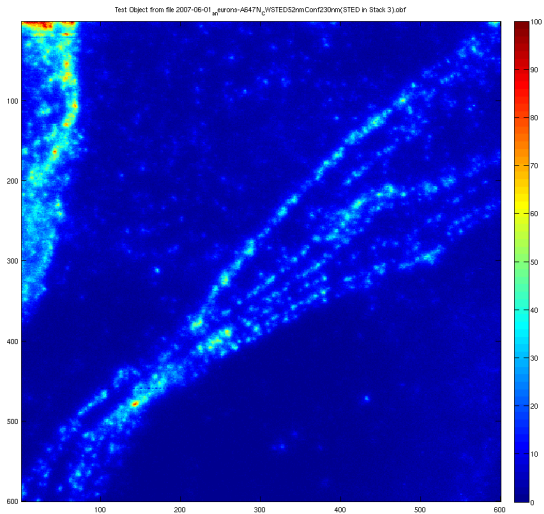
Nanoskopie: Syntaxin PC12, EM-TV mit $\alpha = 0.015$



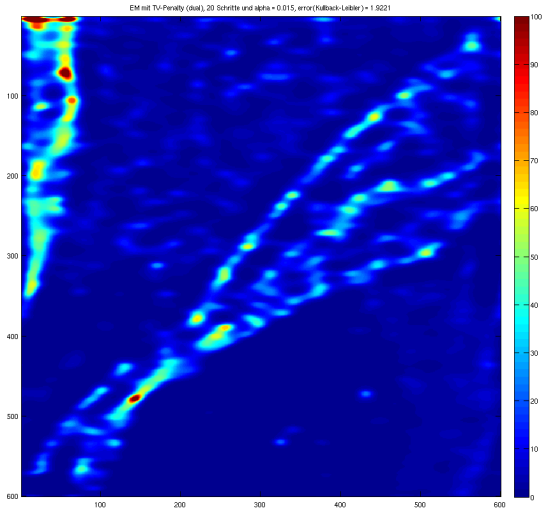
Nanoskopie: Syntaxin PC12, Iterative EM-TV



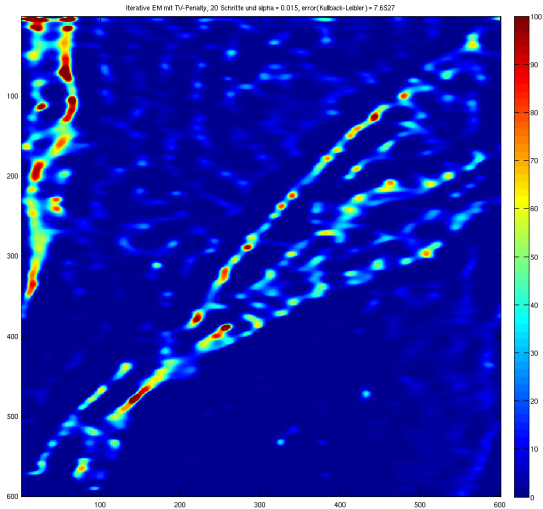
Nanoskopie: Nervenzelle, 52nm



Nanoskopie: Nervenzelle, EM-TV mit $\alpha = 0.015$



Nanoskopie: Nervenzelle, Iterative EM-TV

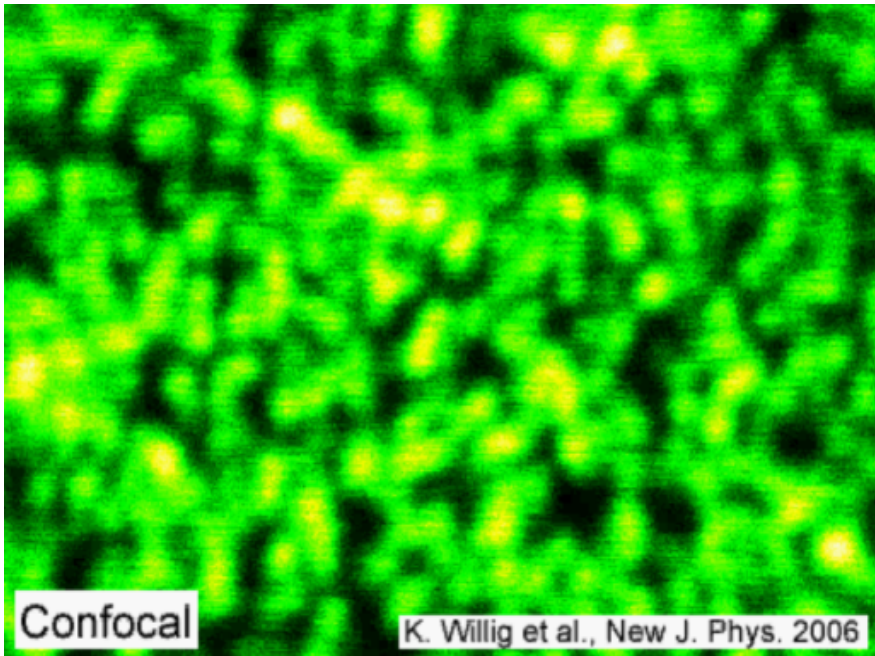


Aktuelle Arbeit und Ziele

- Herausforderung 3D
- Segmentierung \rightarrow Domain-Decomposition \rightarrow Parallelisierung
- Implementierung in C/C++ mit Interface in MATLAB
- Primal-duale Techniken für TV
- Blind deconvolution mit parametrisierten Faltungskernen (ortsinvariante PSF)
- Apriori bekannte Sparsity mit stochastischen Methoden integrieren
- Segmentierung \rightarrow Bildanalyse
- Anisotropie

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!
Fragen?





Confocal

K. Willig et al., New J. Phys. 2006

[back](#)

Confocal

Protein SNAP 25 on plasma membrane

K. Willig et al.,
New J. Phys. 2006

[back](#)