

# Optimale Steuerung eines linearen Servomotors mit Coulomb-Reibung und Zustandsbeschränkungen

Bahne Christiansen, Helmut Maurer



Universität Münster  
Institut für Numerische Mathematik

Oliver Zirn



University of Applied  
Sciences Giessen

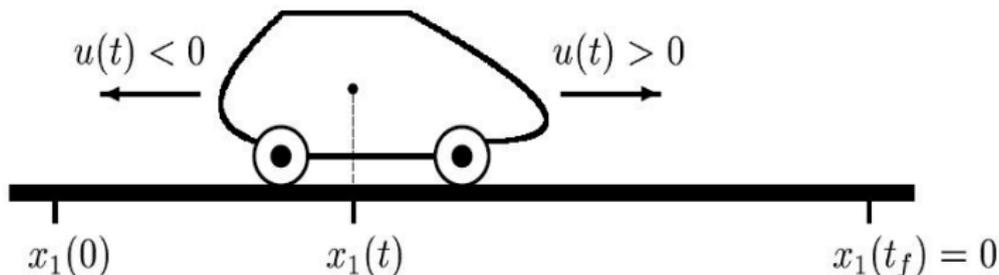
Kleinwalsertal, Januar 2008

- 1 **Optimale Steuerprozesse: Eine kurze Einführung**
  - Grundbegriffe, Formulierung des Standardproblems
  - Minimumprinzip von Pontryagin
- 2 **Der Tauchspulmotor: Motivation und Modellbeschreibung**
  - Herleitung des Optimalen Steuerprozesses
  - Mathematische Herausforderung: zustandsabhängige Unstetigkeiten
- 3 **Zeitoptimale Steuerung**
  - Notwendige Optimalitätsbedingungen
  - Numerische Ergebnisse: bang-bang Steuerung
  - Vergleich: Simulation  $\leftrightarrow$  Echtzeit-Implementierung
- 4 **Energieoptimale Steuerung**

- 1 Optimale Steuerprozesse: Eine kurze Einführung
  - Grundbegriffe, Formulierung des Standardproblems
  - Minimumprinzip von Pontryagin
- 2 Der Tauchspulmotor: Motivation und Modellbeschreibung
  - Herleitung des Optimalen Steuerprozesses
  - Mathematische Herausforderung: zustandsabhängige Unstetigkeiten
- 3 Zeitoptimale Steuerung
  - Notwendige Optimalitätsbedingungen
  - Numerische Ergebnisse: bang-bang Steuerung
  - Vergleich: Simulation  $\leftrightarrow$  Echtzeit-Implementierung
- 4 Energieoptimale Steuerung

# Beispiel: Wie steuert man am schnellsten einen Wagen?

Skizze:



**Relevante Größen:**

$x_1(t)$  : Position des Wagens zum Zeitpunkt  $t \in [0, T]$ ,

$x_2(t)$  : Geschwindigkeit des Wagens zum Zeitpunkt  $t \in [0, T]$ ,

$u(t)$  : Beschleunigung des Wagens zum Zeitpunkt  $t \in [0, T]$ .

**Ziel:** Steuere den Wagen in minimaler Zeit  $T$  vom Startpunkt  $x_1(0) = -4$  zum Endpunkt  $x_1(T) = 0$  ( $x_2(0) = x_2(T) = 0$ ).

## Wichtige Begriffe:

- $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  : **Zustand** des Systems zur Zeit  $t$ ,
- $U \subset \mathbb{R}^m$  : **Steuerbereich**, abgeschlossen und konvex,
- $u : [0, T] \rightarrow U$  : **Steuerung** des Systems zur Zeit  $t$ ,
- $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$  : **Randbedingungen** für den Zustand,
- $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  : **Reine Zustandsbeschränkung**.

- **Kosten- oder Zielfunktional:**

$$F(x, u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x, u) dt$$

- **Dynamik des Systems:**

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- **Randbedingungen für den Zustand:**

$$\varphi(x(0), x(T)) = 0, \quad \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$$

- **Steuerbeschränkung:**

$$u(t) \in U, \quad 0 \leq t \leq T, \quad U \subset \mathbb{R}^m \text{ abgeschlossen und konvex.}$$

- Ggf. **reine Zustandsbeschränkung:**

$$S(x(t)) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

- **Kosten- oder Zielfunktional:**

$$F(x, u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x, u) dt$$

- **Dynamik des Systems:**

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- **Randbedingungen für den Zustand:**

$$\varphi(x(0), x(T)) = 0, \quad \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$$

- **Steuerbeschränkung:**

$$u(t) \in U, \quad 0 \leq t \leq T, \quad U \subset \mathbb{R}^m \text{ abgeschlossen und konvex.}$$

- **Ggf. reine Zustandsbeschränkung:**

$$S(x(t)) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

- **Kosten- oder Zielfunktional:**

$$F(x, u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x, u) dt$$

- **Dynamik des Systems:**

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- **Randbedingungen für den Zustand:**

$$\varphi(x(0), x(T)) = 0, \quad \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$$

- **Steuerbeschränkung:**

$$u(t) \in U, \quad 0 \leq t \leq T, \quad U \subset \mathbb{R}^m \text{ abgeschlossen und konvex.}$$

- Ggf. **reine Zustandsbeschränkung:**

$$S(x(t)) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

- **Kosten- oder Zielfunktional:**

$$F(x, u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x, u) dt$$

- **Dynamik des Systems:**

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- **Randbedingungen für den Zustand:**

$$\varphi(x(0), x(T)) = 0, \quad \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$$

- **Steuerbeschränkung:**

$$u(t) \in U, \quad 0 \leq t \leq T, \quad U \subset \mathbb{R}^m \text{ abgeschlossen und konvex.}$$

- Ggf. **reine Zustandsbeschränkung:**

$$S(x(t)) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

- **Kosten- oder Zielfunktional:**

$$F(x, u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x, u) dt$$

- **Dynamik des Systems:**

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- **Randbedingungen für den Zustand:**

$$\varphi(x(0), x(T)) = 0, \quad \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$$

- **Steuerbeschränkung:**

$$u(t) \in U, \quad 0 \leq t \leq T, \quad U \subset \mathbb{R}^m \text{ abgeschlossen und konvex.}$$

- Ggf. **reine Zustandsbeschränkung:**

$$S(x(t)) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

## (OSP) Standardform eines Optimalen Steuerprozesses

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & F(x, u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x, u) dt \\ \text{unter} & \dot{x} = f(t, x, u), \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \varphi(x(0), x(T)) = 0, \\ & u(t) \in U, \quad 0 \leq t \leq T. \end{array}$$

Jedem Prozeß ordnet man die **Hamilton-Funktion  $H$**  zu:

$$\begin{aligned} H(t, x, \lambda, u) &= \lambda_0 f_0(t, x, u) + \lambda f(t, x, u) \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(t, x, u), \\ &\lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^n \text{ Z.V. : Lagrange-Multiplikatoren.} \end{aligned}$$

## (OSP) Standardform eines Optimalen Steuerprozesses

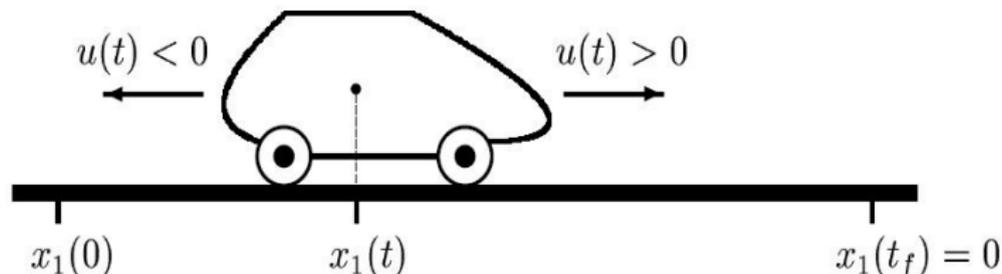
$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & F(x, u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x, u) dt \\ \text{unter} & \dot{x} = f(t, x, u), \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \varphi(x(0), x(T)) = 0, \\ & u(t) \in U, \quad 0 \leq t \leq T. \end{array}$$

Jedem Prozeß ordnet man die **Hamilton-Funktion  $H$**  zu:

$$\begin{aligned} H(t, x, \lambda, u) &= \lambda_0 f_0(t, x, u) + \lambda f(t, x, u) \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(t, x, u), \\ &\lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^n \text{ Z.V. : Lagrange-Multiplikatoren.} \end{aligned}$$

## Zeitoptimale Steuerung des Wagens in Standardform:

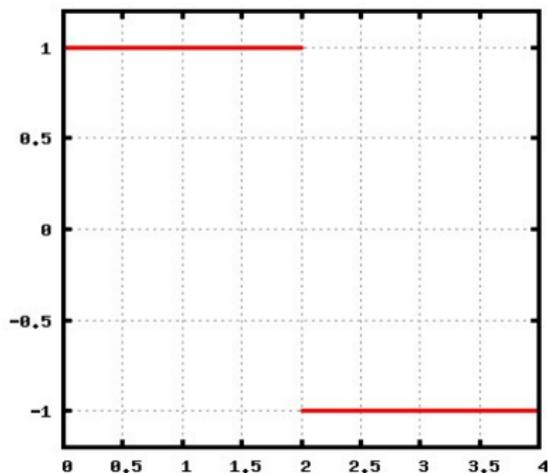
Minimiere  $F(x, u) = T$   
unter  $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$   
 $\dot{x}_2(t) = u(t), \quad 0 \leq t \leq T,$   
 $x_1(0) = -4, \quad x_1(T) = 0,$   
 $x_2(0) = 0, \quad x_2(T) = 0,$   
 $u(t) \in [-1, 1], \quad 0 \leq t \leq T.$



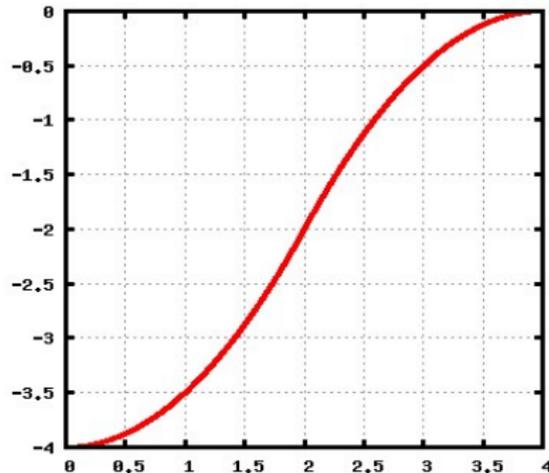
# Beispiel: Wie steuert man am schnellsten einen Wagen?

Maximale Beschleunigung:  $|u(t)| \leq 1, t \in [0, T]$ .

Lösung:  $T = 4$ .



Beschleunigung  $u(t)$

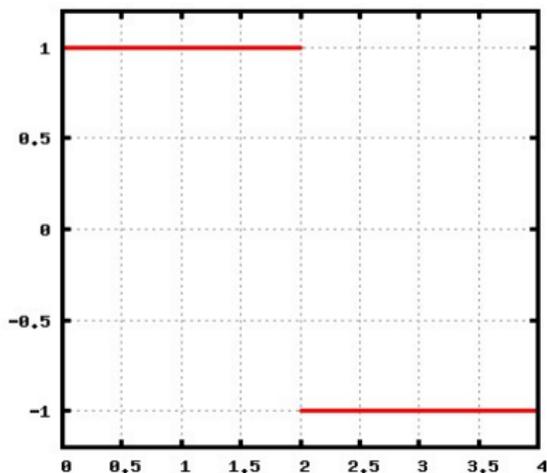


Position  $x_1(t)$

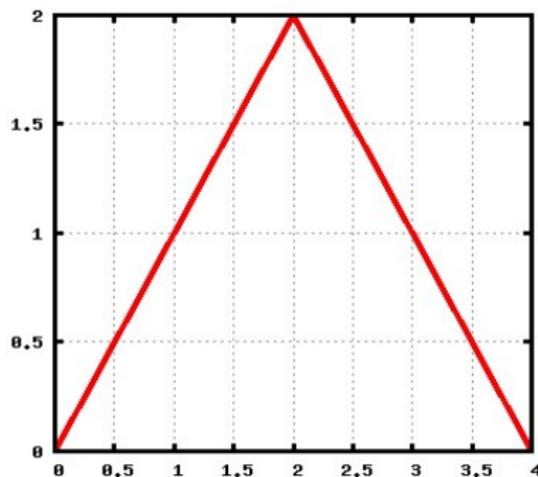
# Beispiel: Wie steuert man am schnellsten einen Wagen?

Maximale Beschleunigung:  $|u(t)| \leq 1, t \in [0, T]$ .

Lösung:  $T = 4$ .



Beschleunigung  $u(t)$

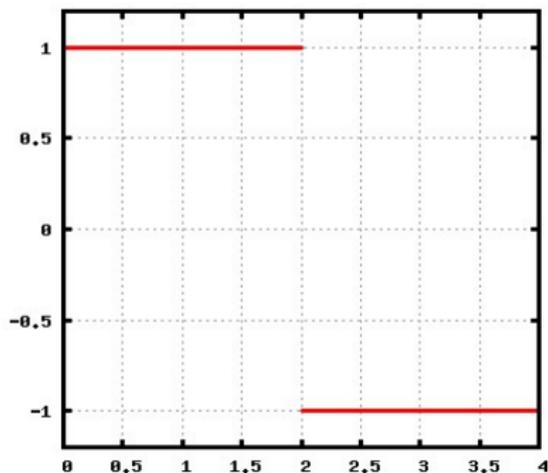


Geschwindigkeit  $x_2(t)$

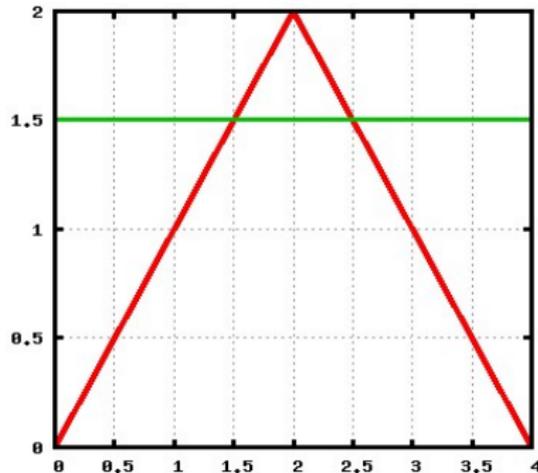
# Beispiel: Wie steuert man am schnellsten einen Wagen?

Maximale Beschleunigung:  $|u(t)| \leq 1, t \in [0, T]$ .

Lösung:  $T = 4$ .



Beschleunigung  $u(t)$



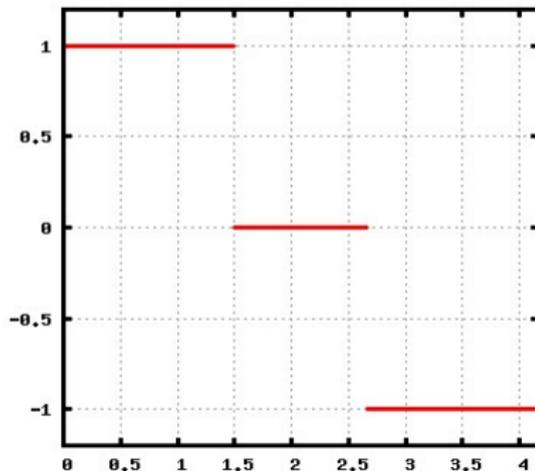
Geschwindigkeit  $x_2(t)$

# Beispiel: Wie steuert man am schnellsten einen Wagen?

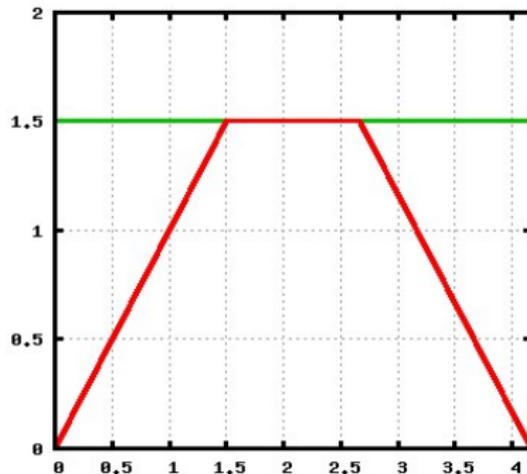
**Maximale Beschleunigung:**  $|u(t)| \leq 1, t \in [0, T]$ .

**Maximale Geschwindigkeit:**  $|x_2(t)| \leq 1.5, t \in [0, T]$ .

**Lösung:**  $T = 4.167$ .



Beschleunigung  $u(t)$



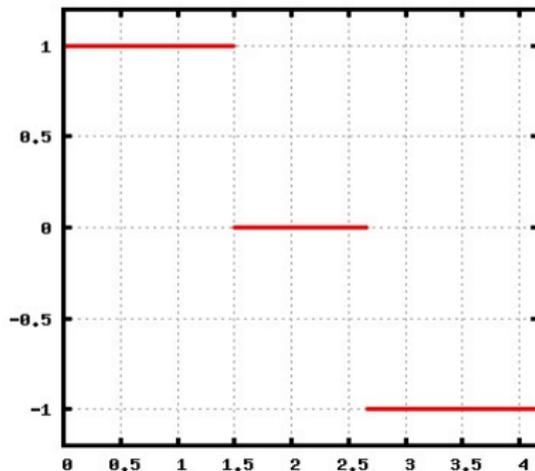
Geschwindigkeit  $x_2(t)$

# Beispiel: Wie steuert man am schnellsten einen Wagen?

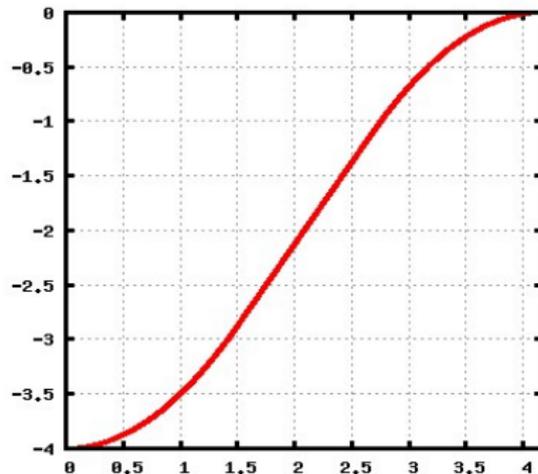
**Maximale Beschleunigung:**  $|u(t)| \leq 1, t \in [0, T]$ .

**Maximale Geschwindigkeit:**  $|x_2(t)| \leq 1.5, t \in [0, T]$ .

**Lösung:**  $T = 4.167$ .



Beschleunigung  $u(t)$



Position  $x_1(t)$

## Das Minimumprinzip von Pontryagin:

Seien  $T^*$  und  $(x^*, u^*) : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}^n \times U$  eine optimale Lösung von (OSP). Dann gibt es ein  $\lambda_0 \geq 0$ , eine stetige und stw. stetig diff'bare Funktion  $\lambda : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und einen Multiplikator  $\rho \in \mathbb{R}^r$  mit  $(\lambda_0, \lambda(t), \rho) \neq 0$  für  $t \in [0, T^*]$ , so dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) Für alle  $t \in [0, T^*]$  gilt die *Minimumbedingung*

$$H(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{u \in U} H(t, x^*(t), \lambda(t), u)$$

und die *adjungierte Differentialgleichung*

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)),$$

wobei diese Bedingungen an Unstetigkeitsstellen der optimalen Steuerung  $u^*$  links- bzw. rechtsseitig zu verstehen sind.

## Das Minimumprinzip von Pontryagin (Forts.):

(ii) Es gelten die *Transversalitätsbedingungen*

$$\lambda(T^*) = \frac{\partial}{\partial x_e} (\lambda_0 g + \rho \varphi)(x^*(0), x^*(T^*)),$$

$$\lambda(0) = -\frac{\partial}{\partial x_a} \rho \varphi(x^*(0), x^*(T^*)),$$

wobei  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $(x_a, x_e) \mapsto \varphi(x_a, x_e)$ .

(iii) Im Falle einer freien Endzeit  $T$  gilt für die optimale Endzeit  $T^*$

$$H(T^*, x^*(T^*), \lambda(T^*), u^*(T^*)) = 0.$$

(iv) Für autonome Probleme mit  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$  gilt

$$H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \text{const}$$

mit  $t \in [0, T^*]$ .

# Erweitertes Minimumprinzip

Erweiterung des Minimumprinzips auf Prozesse mit **reinen Zustandsbeschränkungen**:

Erweiterte Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x, \lambda, \mu, u) &= \lambda_0 f_0(x, u) + \lambda f(x, u) + \mu S(x) \\ \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^k\end{aligned}$$

Minimumprinzip:

[...] und es gibt eine **Multiplikatorfunktion**  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$  und **Multiplikatoren**  $\nu(t_i) \in \mathbb{R}^k$  für jeden Eintritts-, Austritts- oder Kontaktpunkt  $t_i \in (0, T)$ , so dass gilt:

$$\begin{aligned}\mu(t) \geq 0 \text{ und } \mu(t)S_x(x^*(t)) = 0 \text{ für } t \in [0, T], \\ \text{Sprungbedingung: } \lambda(t_i^+) = \lambda(t_i^-) - \nu(t_i)S_x(x(t_i)),\end{aligned}$$

d.h. die Adjungierte  $\lambda$  kann in Eintritts-, Austritts- und Kontaktpunkten unstetig sein.

Linearer Steuerprozess:

$$f_0(x, u) = a_0(x) + b_0(x)u,$$

$$f(x, u) = a(x) + b(x)u.$$

Definiere **Schaltfunktion**:  $\sigma(t) := H_u[t] = b_0(x(t)) + \lambda(t) \cdot b(x(t))$ .

Aus der Minimumbedingung

$$H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{u \in U} H(x^*(t), \lambda(t), u)$$

folgt man

$$\sigma(t) u^*(t) = \min_{u \in U} \sigma(t) u.$$

Es gilt also die **Steuervorschrift** bei linearen Steuerprozessen ( $m = 1$ ):

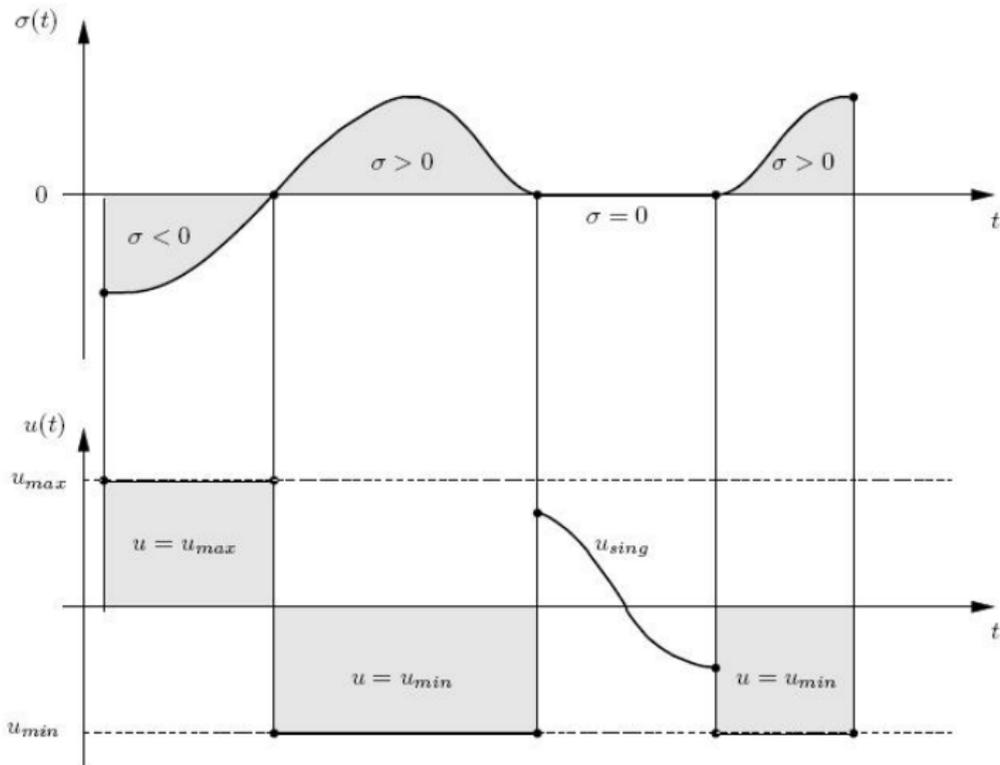
$$u^*(t) = \begin{cases} u_{min}, & \text{falls } \sigma(t) > 0 \\ u_{max}, & \text{falls } \sigma(t) < 0 \\ \text{unbestimmt}, & \text{falls } \sigma(t) = 0 \end{cases}$$

## Definition: bang-bang Steuerung / singuläre Steuerung

Gegeben sei ein Intervall  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  mit  $t_1 < t_2$ .

- Die Steuerung  $u$  heißt *bang-bang* im Intervall  $[t_1, t_2]$ , falls die Schaltfunktion  $\sigma$  nur isolierte Nullstellen in  $[t_1, t_2]$  besitzt. Wegen der Steuervorschrift gilt dann  $u(t) \in \{u_{min}, u_{max}\}$  für fast alle  $t \in [t_1, t_2]$ .
- Die Steuerung  $u$  heißt *singulär* im Intervall  $[t_1, t_2]$ , falls  $\sigma(t) = 0$  für alle  $t \in [t_1, t_2]$  gilt.

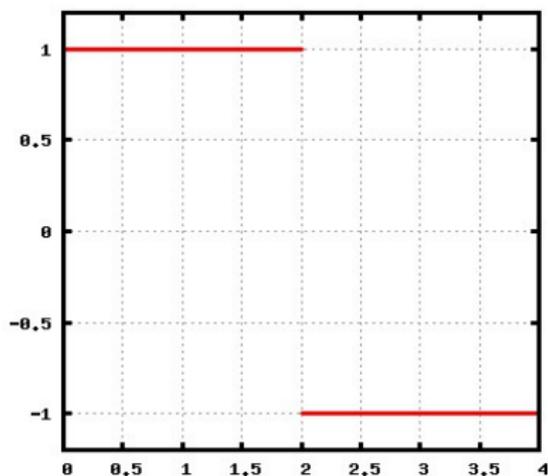
# Linear eingehende Steuerung



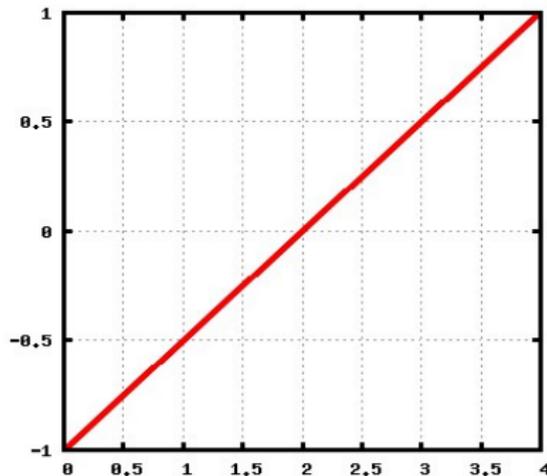
# Beispiel: Wie steuert man am schnellsten einen Wagen?

Maximale Beschleunigung:  $|u(t)| \leq 1, t \in [0, T]$ .

Schaltfunktion:  $\sigma(t) = -\lambda_2(t)$ .



Beschleunigung  $u(t)$



Schaltfunktion  $\sigma(t)$

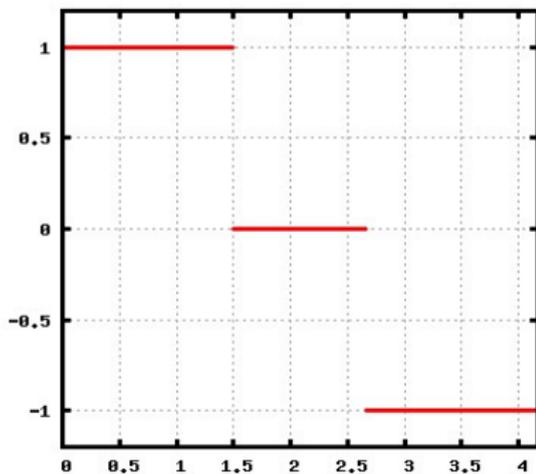
# Beispiel: Wie steuert man am schnellsten einen Wagen?

Maximale Beschleunigung:  $|u(t)| \leq 1, t \in [0, T]$ .

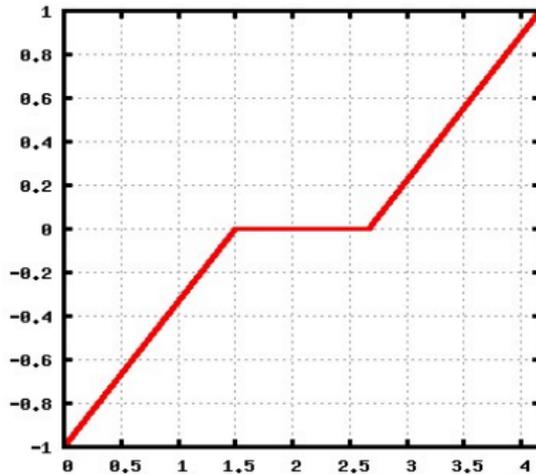
Schaltfunktion:  $\sigma(t) = -\lambda_2(t)$ .

Zustandsbeschränkung (maximale Geschwindigkeit):

$|x_2(t)| \leq 1.5, t \in [0, T]$ .

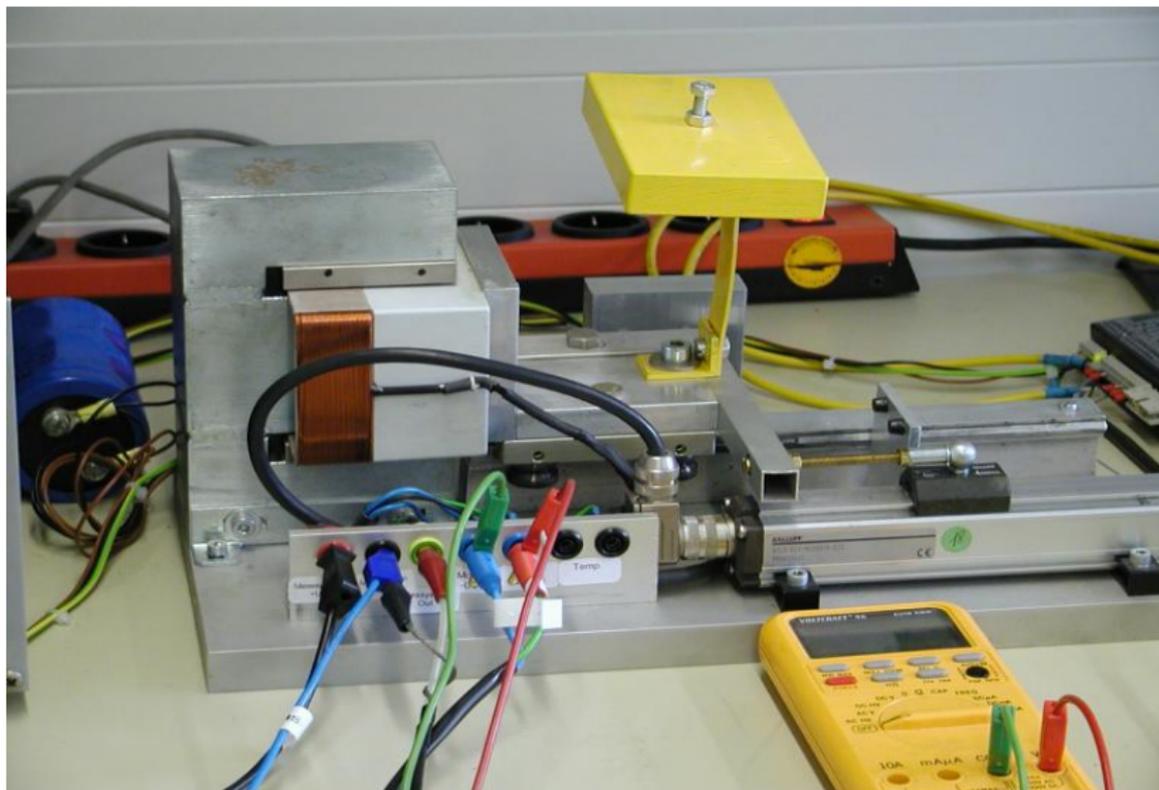


Beschleunigung  $u(t)$



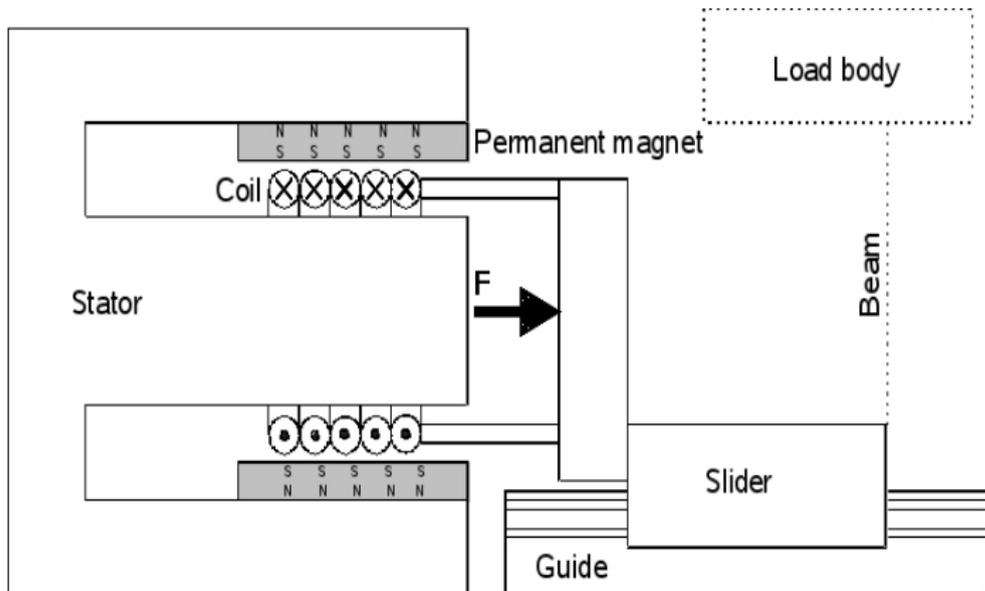
Schaltfunktion  $\sigma(t)$

- 1 Optimale Steuerprozesse: Eine kurze Einführung
  - Grundbegriffe, Formulierung des Standardproblems
  - Minimumprinzip von Pontryagin
- 2 Der Tauchspulmotor: Motivation und Modellbeschreibung
  - Herleitung des Optimalen Steuerprozesses
  - Mathematische Herausforderung: zustandsabhängige Unstetigkeiten
- 3 Zeitoptimale Steuerung
  - Notwendige Optimalitätsbedingungen
  - Numerische Ergebnisse: bang-bang Steuerung
  - Vergleich: Simulation  $\leftrightarrow$  Echtzeit-Implementierung
- 4 Energieoptimale Steuerung



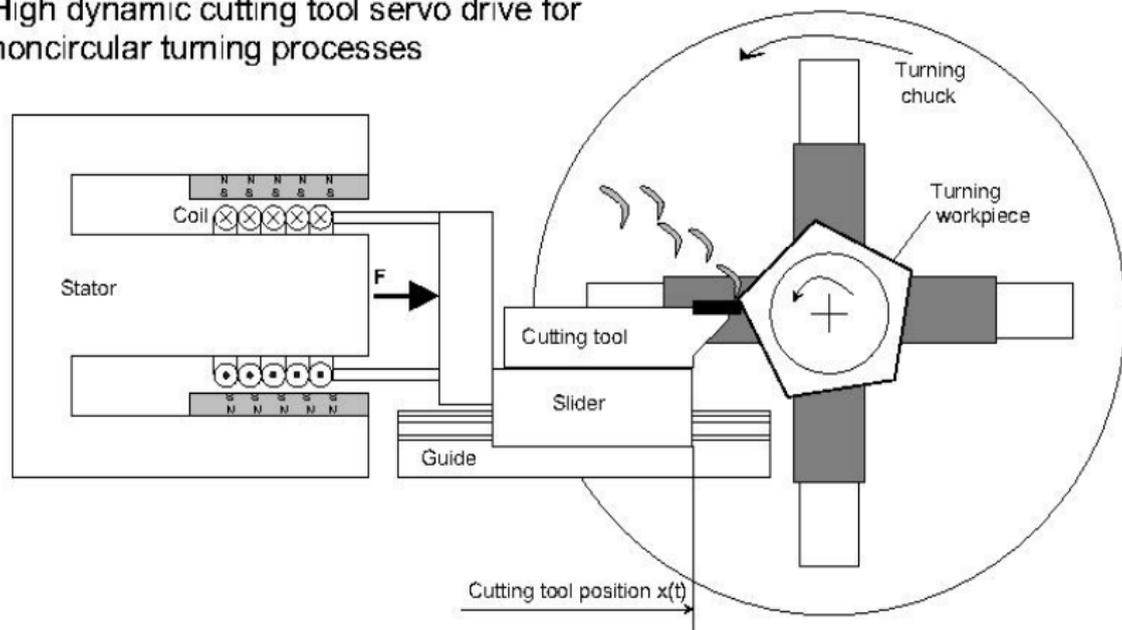
Tauchspulmotor (Testlabor, FH Giessen)

# Der Tauchspulmotor



# Anwendung: Hochdynamische Antriebseinheit in Schneidwerkzeug

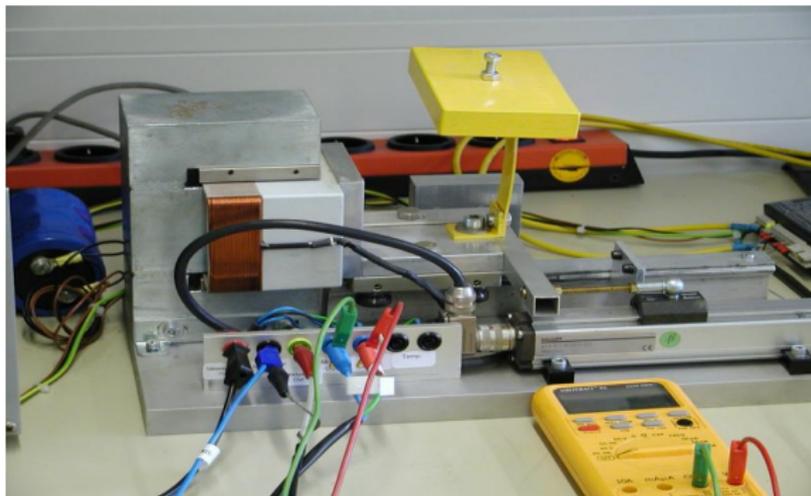
**Voice coil motor application example:**  
High dynamic cutting tool servo drive for noncircular turning processes



# Anwendung: Leiterplattenbohrmaschinen



# Modell eines Tauchspulmotors



**Zustandsvariablen:**

- $x_1(t)$  : Position des Motors
- $v_1(t)$  : Geschwindigkeit des Motors
- $x_2(t)$  : Position der Last
- $v_2(t)$  : Geschwindigkeit der Last
- $I(t)$  : Stromstärke

**Steuerung:**  $u(t) = U(t)$ : **Spannung**

$$\dot{x}_1(t) = v_1(t),$$

$$\dot{v}_1(t) = \frac{1}{m_1} [K_F \cdot I(t) - k \cdot (x_1(t) - x_2(t)) - F_R \cdot \text{sign}(v_1(t))],$$

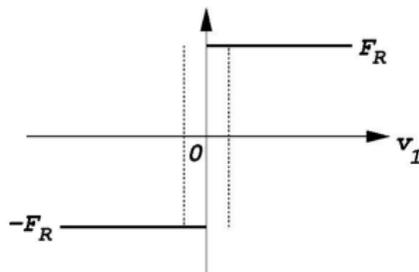
$$\dot{x}_2(t) = v_2(t),$$

$$\dot{v}_2(t) = \frac{k}{m_2} \cdot (x_1(t) - x_2(t)),$$

$$\dot{i}(t) = \frac{1}{L} [u(t) - R \cdot I(t) - K_s \cdot v_1(t)].$$

Statische Coulomb-Reibung:

$$F_R \cdot \text{sign}(v_1)$$



DSPACE Echtzeit-Abtastrate	$T_s = 0.1 \text{ ms}$
Maximale Spannung	$U_{MAX} \leq 30 \text{ V}$
Widerstand der Spule	$R = 2 \Omega$
Induktivität der Spule	$L = 2 \text{ mH}$
Kraftkonstante des Motors	$K_F = 12 \text{ N/A}$
Spannungskonstante des Motors	$K_S = 12 \text{ Vs/m}$
Masse des Motors (Schlitten, Spule)	$m_1 = 1.03 \text{ kg}$
Masse der angekoppelten Last	$m_2 = 0.56 \text{ kg}$
Federkonstante	$k = 2.4 \text{ kN/m}$
Coulomb-Reibung	$F_R = 2.1 \text{ N}$

---

$$\dot{x}_1(t) = v_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = v_2(t)$$

Zeitliche Ableitungen der Positionen sind durch die jeweiligen Geschwindigkeiten gegeben.

## Beschleunigung des Sliders:

$$\dot{v}_1(t) = \frac{1}{m_1} \cdot \overbrace{\left[ \underbrace{K_F \cdot I(t)}_{=:F_1(t)} - \underbrace{K \cdot (x_1(t) - x_2(t))}_{=:F_2(t)} - \underbrace{F_R \cdot \text{sign}(v_1(t))}_{=:F_3(t)} \right]}^{\text{Gesamtkraft } F_{v_1}(t)}$$

„Kraft = Masse x Beschleunigung“

- $F_1(t)$ : Vorschub- oder Lorenzkraft
- $F_2(t)$ : Federkraft
- $F_3(t)$ : Coulombsche Reibungskraft

## Beschleunigung des Sliders:

$$\dot{v}_1(t) = \frac{1}{m_1} \cdot \overbrace{\left[ \underbrace{K_F \cdot I(t)}_{=:F_1(t)} - \underbrace{K \cdot (x_1(t) - x_2(t))}_{=:F_2(t)} - \underbrace{F_R \cdot \text{sign}(v_1(t))}_{=:F_3(t)} \right]}^{\text{Gesamtkraft } F_{v_1}(t)}$$

„Kraft = Masse x Beschleunigung“

- $F_1(t)$ : Vorschub- oder Lorenzkraft
- $F_2(t)$ : Federkraft
- $F_3(t)$ : Coulombsche Reibungskraft

## Beschleunigung des Sliders:

$$\dot{v}_1(t) = \frac{1}{m_1} \cdot \overbrace{\left[ \underbrace{K_F \cdot I(t)}_{=:F_1(t)} - \underbrace{K \cdot (x_1(t) - x_2(t))}_{=:F_2(t)} - \underbrace{F_R \cdot \text{sign}(v_1(t))}_{=:F_3(t)} \right]}^{\text{Gesamtkraft } F_{v_1}(t)}$$

„Kraft = Masse x Beschleunigung“

- $F_1(t)$ : Vorschub- oder Lorenzkraft
- $F_2(t)$ : Federkraft
- $F_3(t)$ : Coulombsche Reibungskraft

## Beschleunigung des Sliders:

$$\dot{v}_1(t) = \frac{1}{m_1} \cdot \overbrace{\left[ \underbrace{K_F \cdot I(t)}_{=:F_1(t)} - \underbrace{K \cdot (x_1(t) - x_2(t))}_{=:F_2(t)} - \underbrace{F_R \cdot \text{sign}(v_1(t))}_{=:F_3(t)} \right]}^{\text{Gesamtkraft } F_{v_1}(t)}$$

„Kraft = Masse  $\times$  Beschleunigung“

- $F_1(t)$ : Vorschub- oder Lorenzkraft
- $F_2(t)$ : Federkraft
- $F_3(t)$ : Coulombsche Reibungskraft

**Beschleunigung der elastisch angekoppelten Last:**

$$\dot{v}_2(t) = \frac{1}{m_2} \cdot K \cdot (x_1(t) - x_2(t))$$

„*Kraft = Masse x Beschleunigung*“

- $F_{v_2}(t) := K \cdot (x_1(t) - x_2(t))$  : Federkraft

## DGL für die Stromstärke:

$$\dot{i}(t) = \frac{1}{L} \cdot [U(t) - R \cdot I(t) - K_S \cdot v_1(t)]$$

## 2. Kirchhoffsche Regel (Maschenregel):

Sämtliche Teilspannungen (= Potentialdifferenzen) in einem *geschlossenen* Stromkreis addieren sich zu Null.

Hier:

- $U(t)$  (Betriebsspannung des Motors)
- $U_1(t) = R \cdot I(t)$  (Ohmsches Gesetz)
- $U_2(t) = K_S \cdot v_1(t)$  (Elektromagnetische Induktion)
- $U_3(t) = L \cdot \frac{d}{dt} I(t)$  (Selbstinduktion)

$$\begin{aligned} \text{Also: } U(t) &= U_1(t) + U_2(t) + U_3(t) \\ &= R \cdot I(t) + K_S v_1(t) + L \cdot \frac{d}{dt} I(t) \end{aligned}$$

# Optimaler Steuerprozeß

Zustand:  $x = (x_1, v_1, x_2, v_2, l) \in \mathbb{R}^5$ ,

Steuerung:  $u \in \mathbb{R}$

## Dynamik

$$\dot{x} = Ax + Bu - e_2 F_R \text{sign}(v_1),$$

$$A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}, B \in \mathbb{R}^5, e_2 \in \mathbb{R}^5.$$

Steuerbeschränkung:  $|u(t)| \leq UMAX$  für  $0 \leq t \leq T$ .

Randbedingungen:

$$x(0) = x_0 = (0, 0, 0, 0, 0), \quad x(T) = x_f = (0.01, 0, 0.01, 0, 0),$$

Zeitoptimal:

Minimiere die Endzeit  $T$ .

Energieoptimal:

Minimiere  $\int_0^T u(t)^2 dt$ ,  $T > 0$  fest.

Zustandsbeschränkungen:

$$-c_v \leq v_1(t) - v_2(t) \leq c_v, \quad t \in [0, T].$$

- 1 Optimale Steuerprozesse: Eine kurze Einführung
  - Grundbegriffe, Formulierung des Standardproblems
  - Minimumprinzip von Pontryagin
- 2 Der Tauchspulmotor: Motivation und Modellbeschreibung
  - Herleitung des Optimalen Steuerprozesses
  - Mathematische Herausforderung: zustandsabhängige Unstetigkeiten
- 3 Zeitoptimale Steuerung
  - Notwendige Optimalitätsbedingungen
  - Numerische Ergebnisse: bang-bang Steuerung
  - Vergleich: Simulation  $\leftrightarrow$  Echtzeit-Implementierung
- 4 Energieoptimale Steuerung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) - F_R e_2 \operatorname{sign}(v_1(t))$$

**Zeige:**  $(A, B)$  ist **vollständig steuerbar**.

Verwende **Multiprozess-Techniken** falls  $v_1(t)$  das Vorzeichen wechselt:

jede zeitoptimale Steuerung ist **bang-bang**.

**Hamilton-Funktion:**

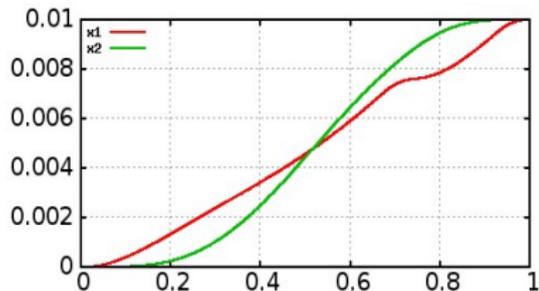
$$H = 1 + \lambda (Ax + Bu - F_R e_2 \operatorname{sign}(v_1)), \quad \lambda \in \mathbb{R}^5$$

**Adjungierte DGL:**  $\dot{\lambda} = -\lambda A$

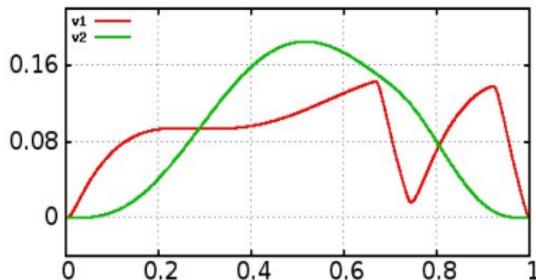
**Schaltfunktion:**  $\sigma(t) = H_u[t] = \lambda_5(t)/L$

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{ll} -UMAX & \text{für } \lambda_5(t) > 0 \\ UMAX & \text{für } \lambda_5(t) < 0 \end{array} \right\}$$

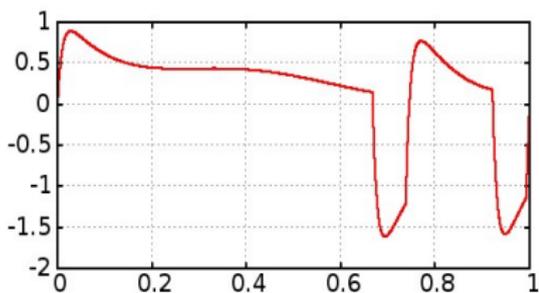
$UMAX = 2$ :  $v_1(t) > 0$  für  $0 < t < T$



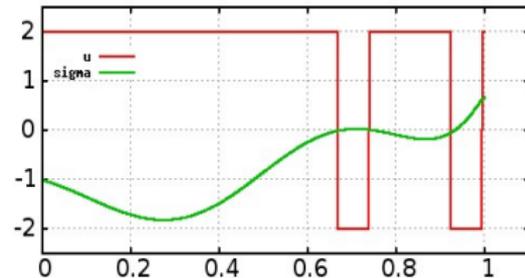
Positionen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$



Geschwindigkeiten  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$



Stromstärke  $I(t)$

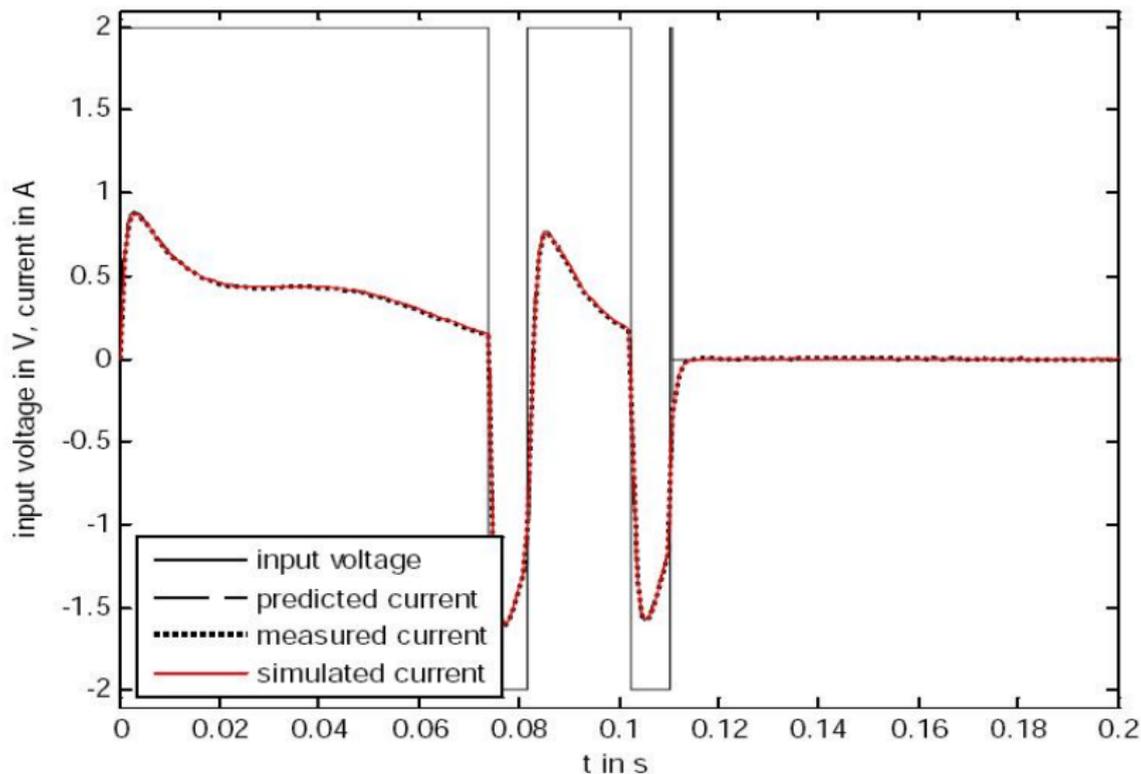


Steuerung  $u$ , Schaltfunktion  $\sigma$

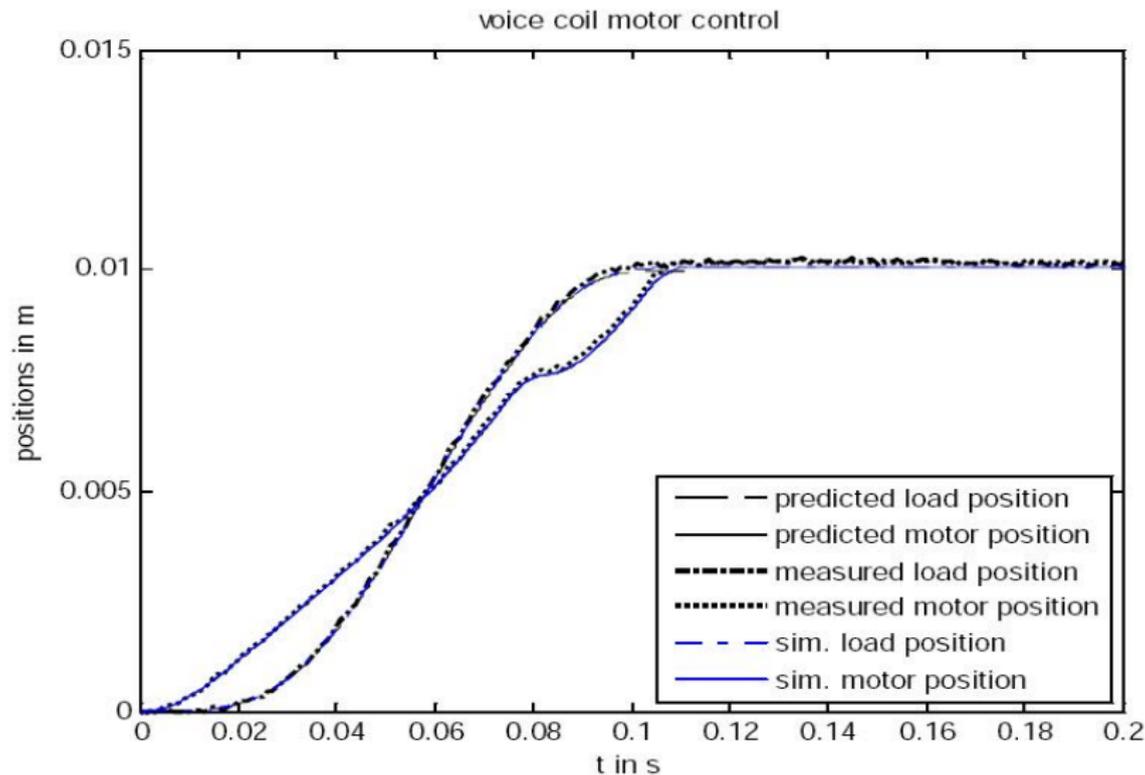
Endzeit  $T = 0.111183$  und Schaltzeiten

$t_1 = 0.074139$ ,  $t_2 = 0.082025$ ,  $t_3 = 0.102442$ ,  $t_4 = 0.110418$ .

# Echtzeit-Implementierung: $UMAX = 2$ , $I(t)$ und $u(t)$



# Echtzeit-Implementierung: $U_{MAX} = 2$ , $x_1(t)$ und $x_2(t)$



## Methode 1

- Verwende NLP-Methoden für den diskretisierten Steuerprozeß.
- Programmiersprache AMPL von Fourer et al.
- Innere-Punkte-Optimierungssolver IPOPT

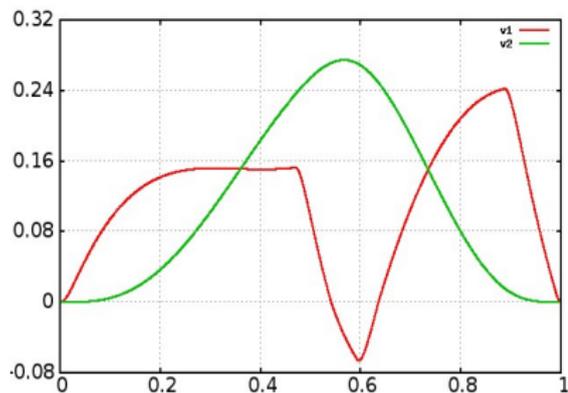
## Methode 2

- Direkte Optimierung der Schaltzeiten  $t_1, t_2, t_3, t_4$  und der Endzeit  $T$ .
- 5 Parameter für 5 Endbedingungen.
- FORTRAN-Routine NUDOCCCS von C. Büskens

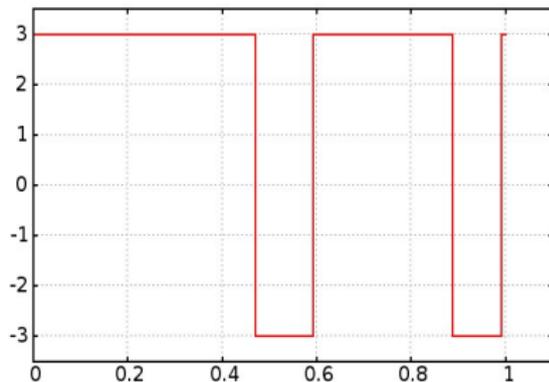
A. Wächter, L.T. Biegler, On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming, *Mathematical Programming* **106**, S. 25-57 (2006).

H. Maurer, C. Büskens, J.-H.R. Kim, C.Y. Kaya, Optimization methods for the verification of second order sufficient conditions for bang-bang controls, *Optimal Control Applications and Methods* **26**,

$UMAX = 3$ :  $v_1(t)$  wechselt Vorzeichen,  $T = 0.088494$



Geschwindigkeiten  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$



Steuerung: Spannung  $u(t)$

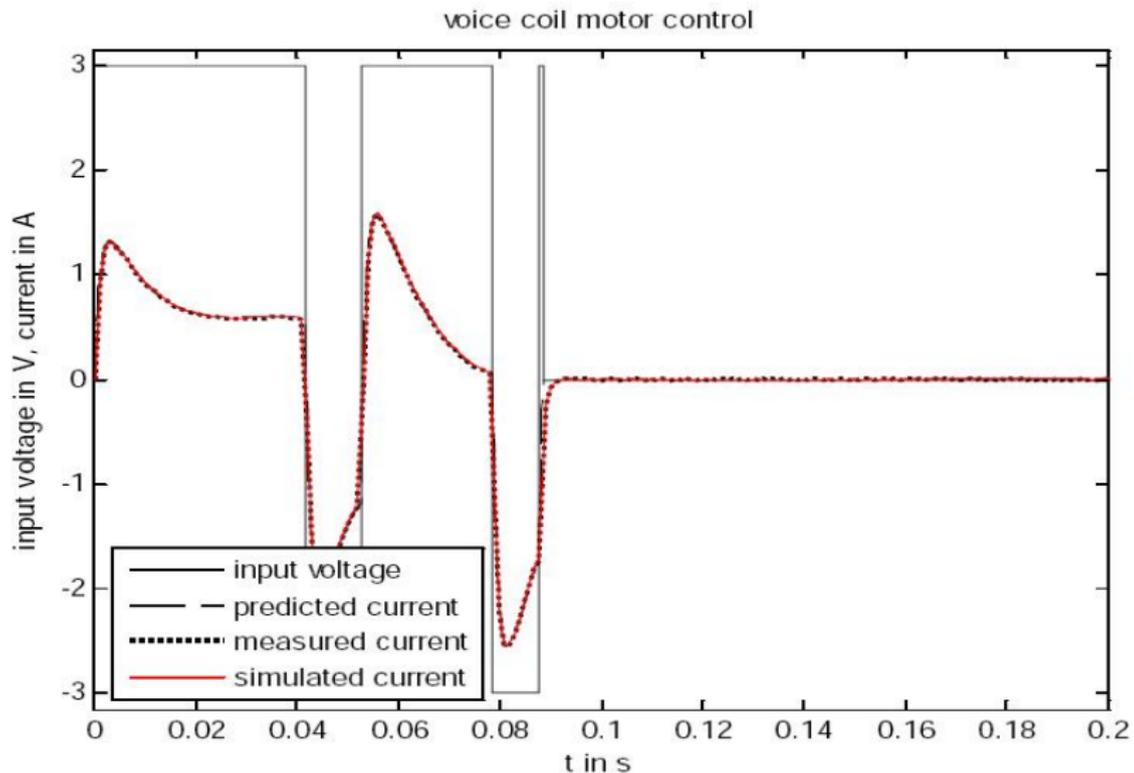
$$v_1(t) < 0 \text{ f\u00fcr } t_1^{(v)} < t < t_2^{(v)}, \quad v_1(t_1^{(v)}) = v_1(t_2^{(v)}) = 0,$$

$$0 < t_1 < t_1^{(v)} < t_2 < t_2^{(v)} < t_3 < t_4 < T.$$

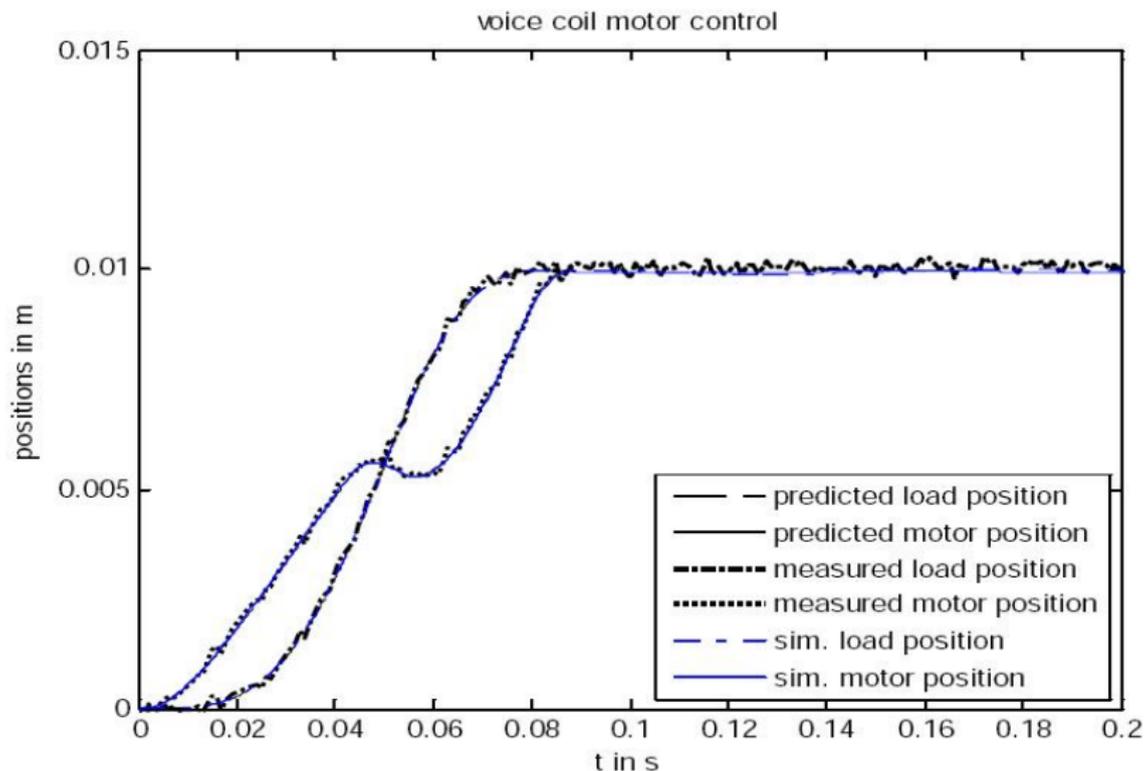
Multiproze\u00df: Clarke/Vinter, Augustin/Maurer.

**Optimiere**  $t_1, \dots, t_4, t_5 = T$  und  $t_1^{(v)}, t_2^{(v)}$ .

# Real-time implementation: $UMAX = 3$ , $I(t)$ and $u(t)$



# Real-time implementation: $UMAX = 3$ , $x_1(t)$ and $x_2(t)$



Für alle Beschränkungen  $UMAX$  besitzt die zeitoptimale Steuerung 4 Schaltpunkte  $t_1, t_2, t_3, t_4$  mit

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{lll} UMAX & \text{für} & 0 \leq t < t_1 \\ -UMAX & \text{für} & t_1 < t < t_2 \\ UMAX & \text{für} & t_2 < t < t_3 \\ -UMAX & \text{für} & t_3 < t < t_4 \\ UMAX & \text{für} & t_4 < t \leq t_5 = T \end{array} \right\}.$$

Es existieren Schranken  $UMAX^{(1)} = 1.85 < 2.33 = UMAX^{(2)}$  mit der Eigenschaft:

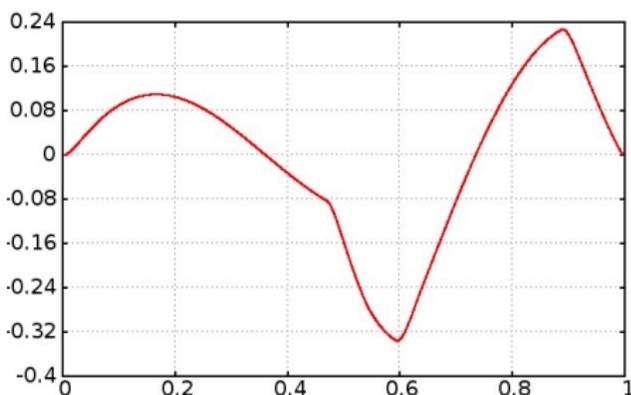
- für alle Schranken  $UMAX$  mit  $UMAX^{(1)} < UMAX < UMAX^{(2)}$  gilt  $v_1(t) > 0$  für  $0 < t < T$ ;
- für  $0 < UMAX < UMAX^{(1)}$  oder  $UMAX^{(2)} < UMAX$  existieren Zeitpunkte  $t_1^{(v)}, t_2^{(v)}$  mit  $v_1(t_1^{(v)}) = v_1(t_2^{(v)}) = 0$

Große Abweichungen zwischen  $v_1(t)$  und  $v_2(t)$  :

$$\max_{t \in [0, T]} |v_1(t) - v_2(t)|$$

$$= 0.337792 =: c_v^0$$

für  $UMAX = 3$ .



Differenz  $v_1(t) - v_2(t)$

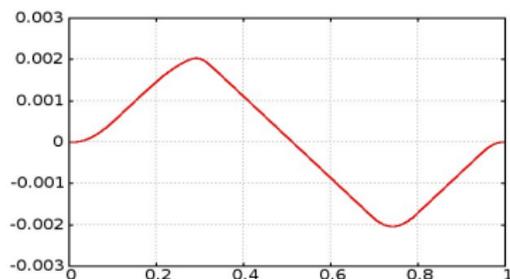
Betrachte zeitoptimale Lösungen mit **Zustandsbeschränkungen**

$$-c_v \leq v_1(t) - v_2(t) \leq c_v \quad \text{für alle } t \in [0, T]$$

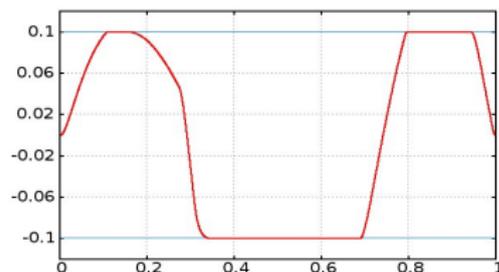
für  $c_v < c_v^0$ , z.B.  $c_v = 0.1$ .

Daraus folgt  $|x_1(t) - x_2(t)| \leq 0.002$ .

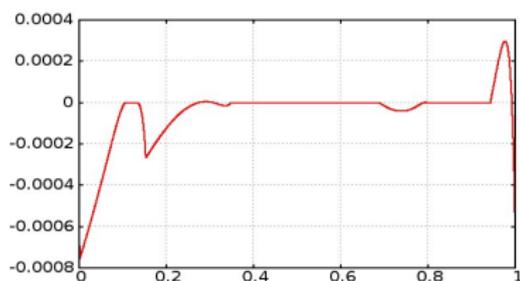
# Zustandsbeschränkung $|v_1(t) - v_2(t)| \leq c_v = 0.1$



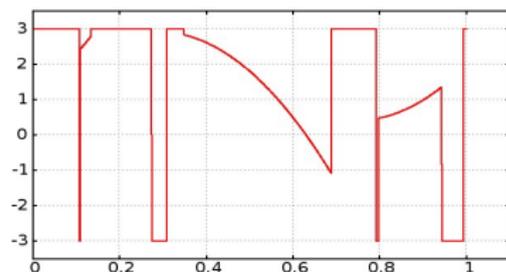
$x_1(t) - x_2(t)$



$v_1(t) - v_2(t)$



$\lambda_5(t)$



Steuerung  $u(t)$

Optimale Steuerung hat **9 bang-bang Stücke** und **3 Randstücke** mit  $|v_1(t) - v_2(t)| = c_v$ . Endzeit  $T = 0.098725$ .

Zustandsbeschränkung:

$$S(x) = v_1 - v_2 \leq c_v \quad \text{oder} \quad S(x) = v_1 - v_2 \geq -c_v$$

sind von der **Ordnung**  $q = 2$ , da

$$S^{(2)}(x, u) = \frac{d^2}{dt^2} S(x) = \alpha(x) + \beta(x) u, \quad \beta(x) \neq 0,$$

$$\alpha(x) = -\frac{R K_F}{L m_1} I - \left( \frac{K_s K_F}{L m_1} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} k \right) v_1 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} k v_2,$$

$$\beta(x) = \frac{K_F}{L m_1}.$$

Auf einem **Randstück** gilt  $S(x(t)) \equiv c_v$  für  $t_{en} \leq t \leq t_{ex}$ .

Die **Randsteuerung**  $u_b$  ist gegeben durch

$$u_b(x) = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

# Zustandsbeschränkungen: notwendige Bedingungen

Erweiterte Hamilton-Funktion mit Multiplikator  $\mu$  für die Zustandsbeschränkung

$$\tilde{H} = 1 + \lambda(Ax + Bu - e_2 F_R \text{sign}(v_1)) + \mu(v_1 - v_2).$$

Modifizierte adjungierte DGL:  $\dot{\lambda} = -\tilde{H}_x$ .

**Sprünge** von  $\lambda(t)$  im **Eintrittspunkt**  $t_{\text{ein}}$  und **Austrittspunkt**  $t_{\text{aus}}$  eines Randstücks

$$\lambda(\tau^+) = \lambda(\tau^-) - \nu(\tau) S_x(\tau), \quad \nu(\tau) \geq 0, \quad \tau \in \{t_{\text{ein}}, t_{\text{aus}}\}.$$

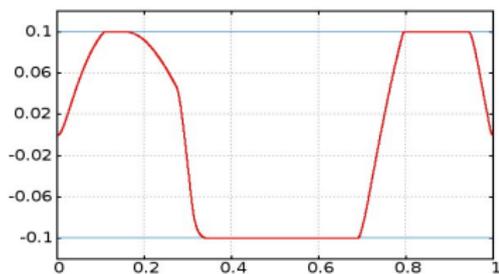
Daher haben  $\lambda_2(t)$  und  $\lambda_4(t)$  Sprünge.

Die Randsteuerung erfüllt  $-UMAX < u_b(x(t)) < UMAX$

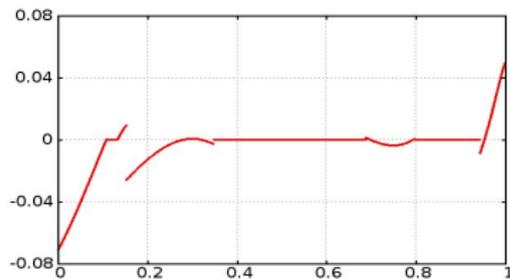
$$\Rightarrow \sigma(t) = \lambda_5(t) / L = \tilde{H}_u[t] \equiv 0, \quad t_{\text{en}} \leq t \leq t_{\text{ex}}.$$

Berechne  $\mu(t) = -\lambda_1(t)$  aus  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ .

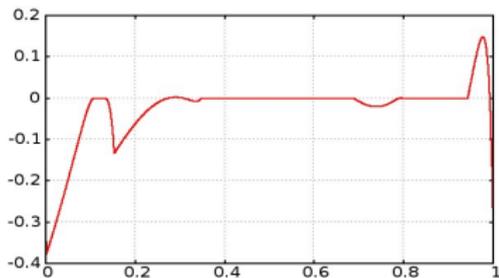
# Randsteuerung, Schaltfunktion und Sprünge



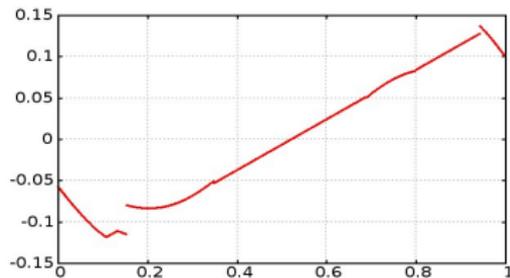
$v_1(t) - v_2(t)$



$\lambda_2(t)$



Schaltfunktion  $\sigma(t) = \lambda_5(t) / L$



$\lambda_4(t)$

- 1 Optimale Steuerprozesse: Eine kurze Einführung
  - Grundbegriffe, Formulierung des Standardproblems
  - Minimumprinzip von Pontryagin
- 2 Der Tauchspulmotor: Motivation und Modellbeschreibung
  - Herleitung des Optimalen Steuerprozesses
  - Mathematische Herausforderung: zustandsabhängige Unstetigkeiten
- 3 Zeitoptimale Steuerung
  - Notwendige Optimalitätsbedingungen
  - Numerische Ergebnisse: bang-bang Steuerung
  - Vergleich: Simulation  $\leftrightarrow$  Echtzeit-Implementierung
- 4 Energieoptimale Steuerung

# Energieoptimale Steuerung

$$\dot{x} = Ax + Bu - e_2 F_R \operatorname{sign}(v_1), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_f,$$

$$|u(t)| \leq UMAX.$$

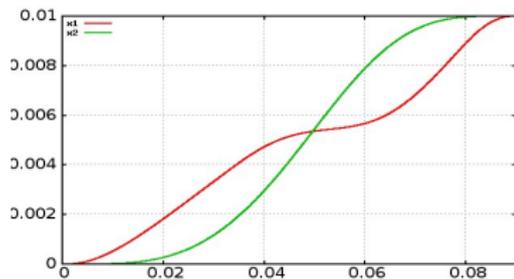
$$\text{Minimiere } \int_0^T u(t)^2 dt \quad \text{für feste Endzeit } T > 0.$$

Minimumprinzip: die optimale Steuerung

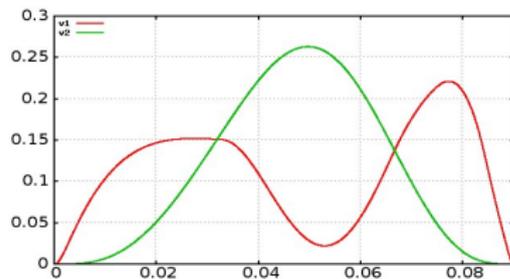
$$u(t) = \operatorname{Proj.}_{[-UMAX, UMAX]} (-\lambda_5(t) / 2L)$$

ist **stetig** (strikte LEGENDRE-Bedingung).

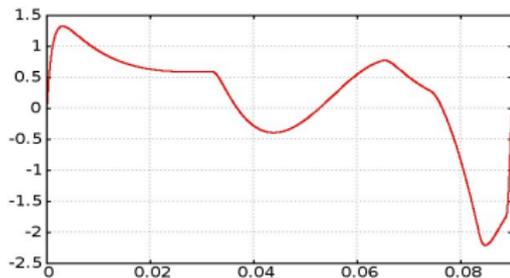
# Energieoptimale Steuerung: $UMAX = 3$ , $T = 0.09$



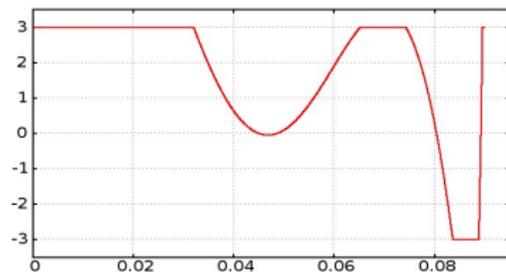
Positionen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$



Geschwindigkeiten  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$

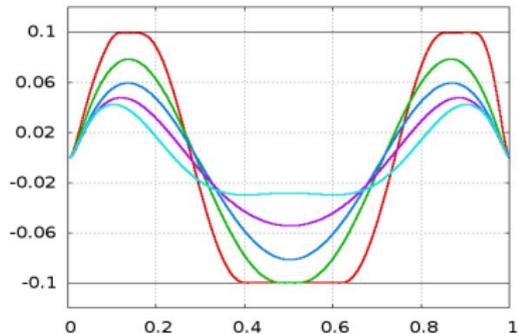


Stromstärke  $I(t)$



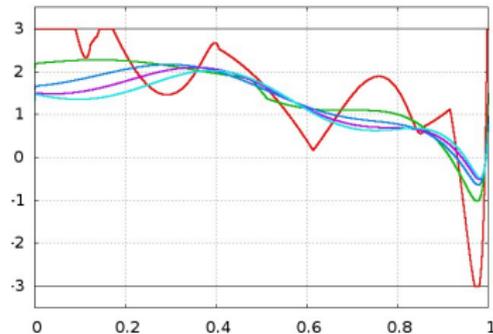
Optimale Steuerung  $u(t)$

# Energieoptimale Steuerung mit Zustandsbeschränkungen: $UMAX = 3, T \geq 0.1, |v_1 - v_2| \leq 0.1$



$t_f = 0.1$  — red  
 $t_f = 0.11$  — green  
 $t_f = 0.12$  — blue  
 $t_f = 0.13$  — purple  
 $t_f = 0.14$  — cyan

Differenz  $v_1(t) - v_2(t)$



$t_f = 0.1$  — red  
 $t_f = 0.11$  — green  
 $t_f = 0.12$  — blue  
 $t_f = 0.13$  — purple  
 $t_f = 0.14$  — cyan

Optimale Steuerung  $u(t)$

Zum Vergleich: optimale Endzeit  $T = 0.098725$ .

- **Optimale Steuerung** eines mechatronischen Systems (elektrodynamischer Aktuator, Tauchspulmotor) hat Vorteile gegenüber klassischen Methoden der **Regelungstechnik**:
  - vermeidet Oszillationen und Überschwngen,
  - ermöglicht eine präzise Steuerung auf einen bestimmten Endpunkt,
  - minimiert die Endzeit,
  - **simulierte** (vorhergesagte) Daten und **experimentell erhaltene** Daten (Testlabor) stimmen sehr gut überein.
- **Mathematische Beiträge**:
  - Optimierung von gew. DGL mit zustandsabhängigen **Unstetigkeiten**,
  - **Zustandsbeschränkungen** der Ordnung zwei und drei,
  - **singuläres Teilstück** der Ordnung zwei oder drei.