Optimal Transportation and Monge-Ampere Equations

Vitali Gretschko

14. Dezember 2006

Inhalt

Problemstellung

Ein Haufen eines bestimmten Materials (Deblais) soll in ein Behältnis von gleichem Volumen befördert werden (Remblais).

Abbildung: Das Monge Problem

Einführung

Einfaches Beispiel

Ein Farmer will Getreide in ein Silo bringen.

- Problem: Aus ökonomischen Gründen sollen die Kosten minimiert werden.
- Diese hängen typischerweise vom Weg ab, den jedes Masseteilchen zurücklegen muß.

Einführung

- Der optimale Transportplan hängt, falls er existiert, von der Form des Deblais und des Remblais ab.
- Bzw. genauer: von der lokalen Dichte der Masse.
- Dieses Problem wurde ursprünglich von Gaspard Monge im Jahre 1781 formuliert.

Gaspard Monge

- Gaspard Monge, comte de Péluse (* 10. Mai 1746 in Beaune; † 28. Juli 1818 in Paris) war ein französischer Mathematiker und Physiker.
- Nachdem er 1780 in die Akademie der Wissenschaften aufgenommen worden war, übernahm er in Paris die Professur für Hydrodynamik.
- Als 1789 die Französische Revolution begann, unterstützte er sie. Als 1792 die Republik ausgerufen wurde, wurde er Marineminister.

Gaspard Monge

- In dieser Funktion musste er das Todesurteil an König Ludwig XVI. vollstrecken lassen.
- 1794 begründete er die École Polytechnique in Paris und bekleidete dort die Professur für Mathematik.
- Nach der zweiten Restauration wurde er 1816 als Vergeltungsmaßnahme sämtlicher Ämter enthoben und aus der Liste des Instituts gestrichen.
- Er ist namentlich auf dem Eiffelturm verewigt, in Paris wurde die sich im 5. Quartier befindende Rue Monge nach ihm benannt.

Motivierende Beispiele

- Optimale Wasserverteilung im Bewässerungssystem
- Optimale Stadtplanung (Allokation von Wohn- und Gewerbegebieten)
- Verkehrsplanung
- Datenverkehr im Internet
- Verzweigung von Bäumen

Grundproblematik

Grundidee

Eine gegebene Dichte soll in eine gewünschte Dichte transportiert werden, bei gleichzeitiger Minimierung der Kosten.

- Dabei können zusätzliche Minimalisierungsprobleme involviert sein, typischerweise die Geometrie, die die Lösung beeinflußt.
- z.B. Ein urbanes Verkehrsnetz oder die Lage von Internetknotenpunkten.

Diese Annahmen führen uns nun auf folgendes mathematisches Modell

Das Monge Problem

- Seien μ und ν zwei nichtnegative Radon - Maße auf $\mathbb{R}^n$
- Wobei μ die gegebene Dichte auf dem Remblais (X) repräsentiert.
- Bzw. ν die gewünschte Dichte auf dem Deblais (Y) nach dem Transport.
- μ und ν sind beschränkt und haben das gleiche Gesamtmaß.

Der Transport

- Der Transport ist eine injektive, meßbare Abbildung $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- die das Maß μ in das Maß ν „drückt“ d.h.

$$\mu(S^{-1}(A)) = \nu(A) \qquad \forall A \in \mathbb{B} \tag{1}$$

oder äquivalent:

$$\int_X (\psi \circ S) d\mu = \int_Y \psi d\nu, \qquad \forall \psi \in L^1(d\nu)$$

- Zu einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ gibt $y = S(x)$ den Ort der Masse, die dort konzertriert war, nach dem Transport an.

Die Kosten

- Nun seien $c = c(x, y)$ die Transportkosten bzw. Arbeit.
- $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ist eine nichtnegative meßbare Funktion.
- Sie gibt an, welche Kosten der Transport der Masse eines Punktes $x \in X$ in einen Punkt $y \in Y$ verursacht.
- Dann gilt für die Gesammtkosten:

$$C_c(\mu, \nu; S) := \int_X c(x, S(x)) d\mu \tag{2}$$

Die Kosten

- Typischerweise hängt c von der euklidischen Distanz $|x-y|$ ab.
- Die wichtigsten Fälle sind:

$$c(x,y) := |x-y| \tag{3}$$

- Dieser Fall wurde von Monge betrachtet, und der für uns wichtige quadratische Fall:

$$c(x,y) := \frac{|x-y|^2}{2} \tag{4}$$

In anderen Anwendungen, z.B. in der Verkehrsplanung, existieren noch kompliziertere Kostenfunktionen.

Formulierung von Monge

- Die Formulierung von Monge liest sich also:

$$O_c(\mu, \nu) = \inf C_c(\mu, \nu; S) \tag{5}$$

- Dabei wird das Infinum über alle Transportfunktionen S erstreckt, die injektiv, meßbar sind und die Bedingung (1) erfüllen.
- Offensichtlich ist dies ein sehr schwieriges Optimierungsproblem, vor allem weil Bedingung (1) hochgradig nichtlinear ist.

Formulierung von Kantorovich

- Einen großen Schritt nach vorne brachte die vereinfachende Version des Monge Problems von L.V. Kantorovich in den 40er Jahren
- Nun gehen wir von einem Wahrscheinlichkeitsmaß π auf dem Produktraum $X \times Y$ aus.
- Informell mißt $d\pi(x, y)$ die Menge an „Masse“, die von Punkt x nach Punkt y transportiert wird.
- Dabei schließen wir nicht aus, dass „Masse“ aus einem Punkt x auf mehrere Punkte y verteilt wird.

Formulierung von Kantorovich

- Damit $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$ zulässig ist fordern wir, daß die „Masse", die aus Punkt x genommen wird mit $d\mu(x)$ und die „Masse", die nach y transferiert wird mit $d\nu(y)$ übereinstimmt , also:

$$\int_Y d\pi(x,y) = d\mu(x), \qquad \int_X d\pi(x,y) = d\nu(y)$$

- d.h π hat die Martingale μ und ν

Formulierung von Kantorovich

- Noch rigoroser fordern wir sogar:

$$\pi[A \times Y] = \mu[A], \qquad \pi[X \times B] = \nu[B] \tag{6}$$

Für alle meßbaren Teilmengen A von X und B von Y

- Wir schreiben die Menge all solcher Maße als

$$\Pi(\mu, \nu) = \{\pi \in \mathcal{P}(X \times Y);\ \text{(6) gilt für alle meßbaren } A, B\} \tag{7}$$

Formulierung von Kantorovich

- Das führt zu fogendem Optimierungsproblem:

$$min \quad I[\pi] = \int_{X \times Y} c(x,y)d\pi(x,y) \qquad \pi \in \Pi(\mu,\nu) \tag{8}$$

- In diesem Fall ist das zu minimierende Funktional linear in π und kompakt genug um zu beweisen, daß es minimiert werden kann.
- Für das Studium dieses Problems, und der ökonomischen Anwendung wurde Kantorovich der Wirtschaftsnobelpreis 1975 verliehen.

Was haben die Formulierungen gemein?

- Was ist nun der Zusammenhang zwischen der Formulierung von Monge und der Formulierung von Kantorovich?
- Das wird ersichtlich wenn wir die Formulierung von Kantorovich wahrscheinlichkeitstheoretisch interpretieren:

Gegeben seien zwei Wahrscheinlichkeitsmaße μ und ν, minimiere den Erwartungswert

$$I(U,V) = \mathbb{E}[c(U,V)] \tag{9}$$

über alle Paare (U,V) von Zufallsvariablen $U \in X$, und $V \in Y$, mit Verteilungen $\mathbb{P}_U = \mu$, $\mathbb{P}_V = \nu$.

Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation

- Die Transportwege $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ sind alle möglichen Verteilungen für das ZV-Paar (U,V).
- Das Monge Problem ist das gleiche wie das von Kantororvich mit der Ausnahme, dass „Masse“ nicht geteilt werden darf
- Also mit ZV's gesprochen V soll eine Funktion in U sein. .
- d.h. also das π folgende Form hat:

$$d\pi(x, y) = d\pi_S(x, y) \equiv d\mu(x)\delta[y = S(x)] \qquad (10)$$

Problem von Monge

- $S : X \to Y$ ist dabei eine injektive, meßbare Funktion und für π_S gilt:

$$\int_{X \times Y} c(x, y)\, d\pi_S(x, y) = \int_X c(x, S(x))\, d\mu(x) \tag{11}$$

- Damit π_S zu $\Pi(\mu, \nu)$ gehört muß S die Bedingung (1) erfüllen.
- Warum das so ist, darauf werde ich in diesem Rahmen nicht näher eingehen. Aber intuitiv sollte es einleuchten.

Zusammenfassung

- Das Problem von Monge ist das gleiche, wie das Problem von Kantorovich.
- Mit der Ausnahme, daß keine „Masse“ geteilt werden darf.
- Deshalb ist zwar jede Lösung des Monge Problems zulässig für das Kantorovich Problem, andersrum gilt das aber nicht.
- Das Kantorovich Problem werden wir jetzt für eine quadratische Kostenfunktion näher betrachten.

Der Dualitätssatz

- Ein großer Schritt in Richtung der Lösung des Problems, war die duale Formulierung dieses Problems
- Das Dualitätsprinzip ist bekannt und einfach zu beweisen für lineare Optimierungsprobleme mit konvexen Zustandsbeschränkungen
- Kantorovich entwickelte und wand dieses Prinzip 1942 auf den optimalen Transport an und bewies das folgende Theorem.
- Das Dualitätsprinzip der linearen Optimierung ergibt sich dann als Spezialfall der sogenannten Kantorovich Dualität.

Der Dualitätssatz Teil 1

Theorem (Kantorovich duality)

Seien X und Y vollständige, separable, metrische Räume, sei $\mu \in \mathcal{P}(X)$ und $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, und sei $c : X \times Y \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ eine stetige Kostenfunktion.

Für $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$ und $(\varphi, \psi) \in L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$, definiere

$$I[\pi] = \int_{X \times Y} c(x,y)\, d\pi(x,y), \quad J(\varphi, \psi) = \int_X \varphi\, d\mu + \int_Y \psi\, d\nu.$$

Der Dualitätssatz Teil 2

Weiterhin sei Φ_c die Menge aller messbarer Funktionen $(\varphi, \psi) \in L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$ für die gilt:

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y) \tag{12}$$

für $d\mu$ fast alle $x \in X$ und $d\nu$ fast alle $y \in Y$. Dann gilt:

$$\inf_{\Pi(\mu,\nu)} I[\pi] = \sup_{\Phi_c} J(\varphi, \psi). \tag{13}$$

Veranschaulichung (Das Versandproblem)

Wie hat man sich das nun vorzustellen?

- Angenommen du bist ein Mathematiker und gleichzeitig ein Industriemagnat.
- Du möchtes Kohle aus deine Mienen in deine Fabriken transportieren.
- Zu diesem Zweck kannst du LKWs mieten, die dich c(x,y) kosten pro Tonne, die du aus Miene x in die Fabrik y transportierst.
- Die Menge die eine bestimmte Miene fördert, und die Menge die eine bestimmte Fabrik verbraucht sind fest.
- Während du also versuchst das Monge-Kantorovich Problem zu lösen und deine Kosten zu minimieren kommt ein anderer Mathematiker.

Veranschaulichung (Das Versandproblem)

Er sagt: „Mein Freund, lass mich das für dich machen: Ich werde die Kohle mit meinen LKWs transportieren. Dafür berechne ich dir $\varphi(x)$ für das Beladen eines LKW in Miene x, und $\psi(y)$ für das Abladen in der Fabrik y. Die Preise sind so gewählt, dass es sich für dich auf jeden Fall lohnt. Also $\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$. Um das zu erreichen bin ich sogar bereit am manchen Orten negative Preise zu setzen"

- Natürlich gehst du auf den Deal ein.
- Das Kantorovich Theorem besagt jetzt, dass dein Mathematikerfreund, wenn er clever genug ist, die Preise so setzen kann, dass du ungefähr so viel ausgeben mußt, wie mit der anderen Methode.

Existenz der Lösung

- Von nun an sei die Kostenfunktion quadratisch. Also $c(x,y) = \frac{|x-y|^2}{2}$
- Seien μ, ν zwei Borelmaße auf $\mathbb{R}^n$ mit endlichem zweiten Moment, d.h.

$$M_2 := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{2} d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{2} d\nu(x) < +\infty. \tag{14}$$

- Diese Bedingung stellt sicher, daß das Funktional $I[\pi]$ immer endlich auf $\Pi(\mu,\nu)$ bleibt, denn für $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ gilt:

Existenz der Lösung

$$I[\pi] = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|x-y|^2}{2} d\pi(x,y) \leq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (|x|^2 + |y|^2) d\pi(x,y) = 2M_2$$

- Nun kann man zeigen, daß $\Pi(\mu, \nu)$ kompakt bezüglich der schwachen Topologie ist. Deshalb existiert für das Funktional $I[\pi]$ ein Minimum. Da ja $I[\pi]$ bezüglich der schwachen Topologie stetig ist.
- Auch diesen Beweis sparen wir uns in diesem Rahmen.

Dualität

- Im folgenden wollen wir das Dualitätsprinzip nutzen um ein konkretes Ergebnis zu bekommen.
- Wir erinern uns an die Bedingung für (φ, ψ) um zu Φ_c zu gehören:

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq \frac{|x-y|^2}{2} \tag{15}$$

für $d\mu$ fast alle x und $d\nu$ fast alle y aus $\mathbb{R}^n$

- Eine Umstellung ergibt:

$$x \cdot y \leq \left[\frac{|x|^2}{2} - \varphi(x)\right] + \left[\frac{|y|^2}{2} - \psi(y)\right] \tag{16}$$

Konvexifizierung

- Zur Vereinfachung führen wir nun neue Variable ein:

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{|x|^2}{2} - \varphi(x), \qquad \tilde{\psi}(y) = \frac{|y|^2}{2} - \psi(y)$$

- Und vergessen gleich auch wieder, der Einfachheit halber, die Tilde.
- Unter der Benutzung von (14) folgt

$$\inf_{\Pi(\mu,\nu)} I[\pi] = M_2 - sup \left\{ \int (x \cdot y) d\pi(x,y); \quad \pi \in \Pi(\mu,\nu) \right\} \quad (17)$$

und

$$\sup_{\Phi_c} J = M_2 - \inf \left\{ J(\varphi,\psi); \quad (\varphi,\psi) \in \tilde{\Phi} \right\} \quad (18)$$

Konvexifizierung

- Dabei ist $\tilde{\Phi}$ die Menge aller Paare $(\varphi, \psi) \in L_1(d\mu) \times L_1(d\nu)$, so dass für fast alle x, y gilt:

$$x \cdot y \leq \varphi(x) + \psi(y) \tag{19}$$

Dann ist nämlich:

$$sup \left\{ \int (x \cdot y) d\pi(x, y); \quad \pi \in \Pi(\mu, \nu) \right\} = \inf \left\{ J(\varphi, \psi); \quad (\varphi, \psi) \in \tilde{\Phi} \right\} \tag{20}$$

- Um jetzt zum finalen Ergebnis zu kommen, wenden wir einen Konvexifizierungstrick an:

Konvexifizierung

Für $(\varphi, \psi) \in \tilde{\Phi}$ schreibt man nun für $d\nu$ fast alle $y \in Y$:

$$\psi(y) \geq \sup_x [x \cdot y - \varphi(x)] =: \varphi^*(y) \tag{21}$$

Dann gilt:

$$J(\varphi, \psi) \geq J(\varphi, \varphi^*) \tag{22}$$

Weiterhin sei, für $d\mu$ fast alle $x \in X$,

$$\varphi(x) \geq \sup_y [x \cdot y - \varphi^*(x)] =: \varphi^{**}(y) \tag{23}$$

Und damit,

$$J(\varphi, \varphi^*) \geq J(\varphi^{**}, \varphi^*) \tag{24}$$

Konvexifizierung

- Mit (22) und (24) sehen wir sofort

$$\inf_{(\varphi,\psi)\in\tilde{\Phi}} J(\varphi,\psi) \geq \inf_{\varphi\in L_1(d\mu)} J(\varphi^{**},\varphi^{*}) \tag{25}$$

- Falls nun also $(\varphi^{**},\varphi^{*}) \in L_1(d\mu) \times L_1(d\nu)$, dann auch $(\varphi^{**},\varphi^{*}) \in \tilde{\Phi}$, also es folgt, dass sich das Infinum von J auf $\tilde{\Phi}$ nicht ändert wenn wir nur die Teilmenge betrachten, die sich aus Paaren $(\varphi^{**},\varphi^{*})$ besteht
- Nun sind aber φ^{*} und φ^{**} besondere Funktionen.
- Sie sind konvexe halbstetige Funktionen, da sie als Supremum einer Familie linearer Funktionen definiert sind.

Brenier's Theorem

- Dies ist natürlich nicht mal annähernd eine vollständige Betrachtung.
- Der letzte Abschnitt diente lediglich dazu, um das folgende zentrale Theorem besser akzeptieren zu können, und damit nicht das Gefühl zu haben, dass es völlig aus der Luft gegriffen ist.
- Kommen wir nun zum zentralen Ergebnis dieses Vortrags, das Theorem von Brenier
- Brenier ist Professor der Mathematik an der Universität Nizza.

Brenier's Theorem

Theorem (Optimal transportation theorem for ^{2} cost).

Seien μ, ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^n$, mit endlichen 2ten Momenten, im Sinne von (14), und c(x,y) eine quadratische Kostenfunktion. Dann gilt
(i)(**Knott-Smith optimality criterion)** $\pi \in \Pi$ ist genau dann optimal, falls eine konvexe, halbstetige Funktion φ existiert, so dass

$$\text{für } d\pi \text{ fast alle } (x, y), \quad y \in \partial\varphi(x) \tag{26}$$

Darüberhinaus minimiert in diesem Fall das Paar (φ, φ^*) das Problem:

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\nu; \quad (\varphi, \psi) \in \tilde{\Phi} \right\} \tag{27}$$

Brenier's Theorem

(ii) **(Brenier's theorem)** Falls μ keine „Masse“ auf kleine Mengen verteilt, existiert ein eindeutiges, optimales π, für das gilt:

$$d\pi(x,y) = d\mu(x)\delta[y = \nabla\varphi(x)] \tag{28}$$

dabei ist $\nabla\varphi$ der Gradient einer konvexen Funktion und erfüllt Bedingung (1)
(iii) Aus (ii) folgt dann $\nabla\varphi$ ist die eindeutige Lösung des Monge - Problems mit quadratischen Kosten:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x - \nabla\varphi(x)|^2 \, d\mu(x) = \inf_{S \text{ erfüllt } (1)} \int_{\mathbb{R}^n} |x - S(x)|^2 \, d\mu(x)$$

Verbindung zu Partiellen Differentialgleichungen

- Es wirft sich nun die Frage auf: „Was hat dieser Vortrag mit dem Seminar Partielle Differentialgleichnungen zu tun?“
- Sei nun $d\mu(x) = f(x)\,dx$, $d\nu(y) = g(y)\,dy$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, die stetig bezüglich des Lebesguemaßes sind.
- Aus Bernier's Theorem wissen wir für das Monge Problem existiert eine konvexe Funktion φ, so daß

$$S_{opt}(x) = \nabla\varphi(x), \qquad \nabla\varphi(x) \text{ erfüllt } (1) \tag{29}$$

Monge-Ampere Gleichung

- Damit gilt für $\psi \in L^1(\mu)$:

$$\int \psi(y)\, g(y) dy = \int \psi(\nabla\varphi(x)) f(x) dx \tag{30}$$

- Wenn wir nun annehmen, dass $\nabla\varphi$ C^1 und injektiv ist, was der Fall ist wenn φ strikt konvex ist, gilt nach der Substitution $y = \nabla\varphi(x)$:

$$\int \psi(y)\, g(y) dy = \int \psi(\nabla\varphi(x))\, g(\nabla\varphi(x)) det(D^2\varphi(x)) dx \tag{31}$$

Monge-Ampere Gleichung

- Da ja ψ beliebig ist, folgt aus (30) und (31)

$$f(x) = g(\nabla\varphi(x))det(D^2\varphi(x)) \tag{32}$$

- Falls g positiv ist, können wir das umschreiben als:

$$det(D^2\varphi(x)) = \frac{f(x)}{g(\nabla\varphi(x))} \tag{33}$$

Das ist ein Spezialfall der allgemeinen **Monge-Ampere Gleichung**

$$det(D^2\varphi(x)) = F(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)) \tag{34}$$

Abschließende Bemerkungen

- Das letzte Resultat verbindet die „Optimaler Transport“ - Theorie mit dem Feld der partiellen Differentialgleichungen
- Die Monge-Ampere Gleichung ist eine nichtlineare, elliptische Differentialgleichung
- Im Fall einer nichtquadratischen Kostenfunktion $c = c(|x - y|)$ ist die Lösung nicht unbedingt konvex.
- Hier sei nur angemerkt, dass die Lösung existiert und folgende Gleichung erfüllt:

$$S_{opt}(x) = x - a(x)\nabla u(x), \qquad |\nabla u(x)| = 1 \quad a(x) \geq 0 \tag{35}$$

Abschließende Bemerkungen

- Für realistische Probleme muß die Kostenfunktion angepasst werden. Insbesondere wenn Nebenbedingungen an die Transporttrajektorien gestellt sind.
- Zum Beispiel bei der Konstruktion eines optimalen ÖPNV, wie sie von Buttazzo und Stepanov durchgeführt wurde.
- Dabei ist μ die Dichte der Wohngebiete und ν die Dichte der möglichen Arbeitsplätze.
- Die Kostenfunktion ist so definiert, dass sie beinhaltet, das ein Subjekt von x nach y laufen kann, oder von x aus zum nächsten Knotenpunkt des Transportsystems läuft, es dann bis zum nächsten Knotenpunkt zu y benutzt, und dann zu y läuft.

Deblais

Abbildung: Ein Haufen Schutt

Deblais

Abbildung: Noch ein Haufen Schutt

Verzweigungen

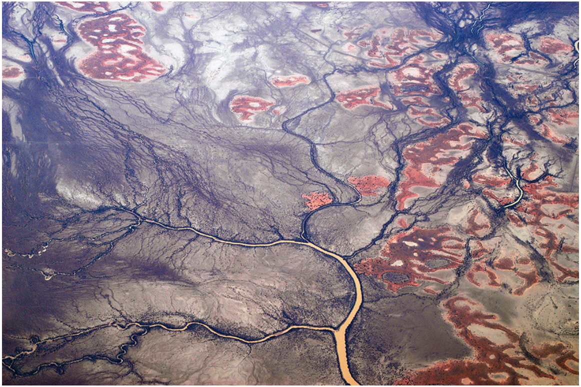

Abbildung: Flußverzweigung

Verzweigungen

Abbildung: Verzweigung in Blättern

Verzweigungen

Abbildung: Und noch einmal Blätter

Verzweigungen

Abbildung: Verzweigung im Baum

Verzweigungen

Abbildung: Und noch ein Baum

Verzweigungen

Abbildung: Ein Baum, der nicht Mathematik studiert hat

Erläuterungen

- Verzweigungen können als Versorgungs- und Bedarfssysteme gesehen werden.
- „Güter“ (Nährstoffe, Flußwasser) werden von der Versorgungsbasis (Wurzel, Quelle) zum Verbrauchspunkt (Blattrand, Mündung) transportiert.
- Hier kann das Monge-Kantorovich Problem nicht direkt angewandt werden, da die Transportwege eingeschränkt sind und die Kosten für die Bildung der „Infrastruktur“ nicht berücksichtigt werden.

Stadtplanung

Abbildung: Buenos Aires

Stadtplanung

Abbildung: Quito

Stadtplanung

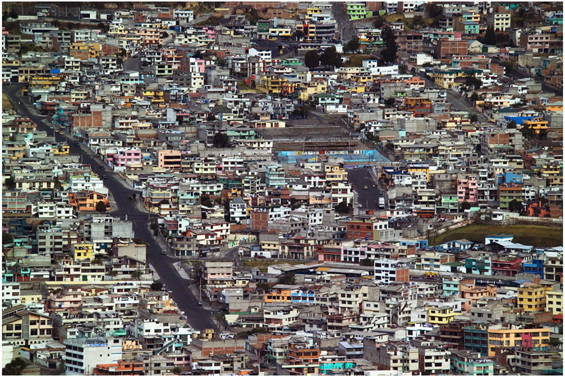

Abbildung: Rio de Janeiro

Stadtplanung

Abbildung: Rio de Janeiro

Stadtplanung

- Stadtplanungsprobleme sind erst vor kurzem in der mathematischen Literatur aufgetaucht
- Die Modelle basieren auf den Annahmen,
- dass Transportkosten existieren um sich zwischen Wohn- und Gewerbegebieten zu bewegen,
- dass Überbevölkerung von Wohngegenden von den Einwohnern vermieden wird und
- dass Eine Konzetration von Gewerbegebieten von Vorteil ist.
- Offensichtlich werden wichtige Punkte vernachlässigt (Historisches Wachstum, geringes Einkommen und Slums durch unkontrolierte Ansiedlung, topographie ...)

Das Wichtigste Transportproblem

Abbildung: Ein letztes Monge Problem

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!