
Aufgaben zum Praktikum
Numerik Partieller Differentialgleichungen I
WS 2008/2009 — Blatt 6

Abgabe: 4.2.2008 per Email

Aufgabe 1 (Dune-FEM Finite Elemente)

Im Folgenden soll ein elliptisches Randwertproblem mit Hilfe von Finiten Elementen erster Ordnung in 3D gelöst werden. Das Gebiet sei $\Omega := [-1, 1]^3 \setminus [0, 1]^3$ mit Dirichletrand $\Gamma_D = \partial\Omega \cap [0, 1]^3$ und Neumann-Rand $\Gamma_N := \partial\Omega \setminus \Gamma_D$. Für ein festes $\alpha \in (0, 1)$ ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x)\nabla u(x)) &= f(x) && \text{in } \Omega, \\ u(x) &= g_D(x) && \text{auf } \Gamma_D, \\ (a(x)\nabla u(x)) \cdot n(x) &= g_N(x) && \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $n(x)$ die äußere Einheitsnormale im Punkt $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ auf dem Rand, $a(x) = x_1 + 2$, $f(x) = -\alpha \|x\|^{\alpha-2} (2x_1 + \alpha x_1 + 2\alpha + 2)$, $g_D(x) = \|x\|^\alpha$ und $g_N(x) = \alpha \|x\|^{\alpha-2} (x_1 + 2)x \cdot n$. Bestandteile Ihres Programmes sollen werden:

Makrogitter: Erstellen Sie ein geeignetes Makrogitter im DGF-Format.

Modell: Schreiben Sie eine Modell-Klasse, welche die Datenfunktionen des Randwertproblems enthält. Bei der Implementation von f soll eine Auswertung in $x = 0$ durch sinnvolle Erweiterung ermöglicht werden (in Quadraturen benötigt).

Diskreter Funktionenraum: Es soll ein `LagrangeDiscreteFunctionSpace` erster Ordnung verwendet werden.

Matrix: Die Systemmatrix soll in einer selbst geschriebenen Matrixklasse repräsentiert werden. Die Schnittstelle ergibt sich hierbei unter anderem durch die Anforderungen der Gleichungssystemlöser. Die Matrix soll assembliert werden durch Akkumulation der Element-Beiträge.

Rechte Seite: Die rechte Seite des Gleichungssystems kann als diskrete Funktion repräsentiert und assembliert werden.

Randbehandlung: Nach dem Assemblieren der Matrix und der rechten Seite soll eine Randbehandlung der Dirichlet-Zeilen im Gleichungssystem erfolgen.

Gleichungssystemlöser: Es soll ein geeigneter iterativer Gleichungssystemlöser aus Dune-FEM verwendet werden zum Lösen des resultierenden Gleichungssystems.

Fehlerbestimmung: Schreiben Sie eine Routine zur Berechnung des Fehlers $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ der erhaltenen diskreten Lösung u_h zur exakten Lösung $u(x) = \|x\|^\alpha$.

Gitteradaptivität: Implementieren Sie Residualfehlerschätzer zur Identifikation von zu grob aufgelösten Gitterbereichen. Führen Sie mit einer Gleichverteilungsstrategie eine Gitteradaption durch, um die numerische Lösung zu verbessern.

Realisieren Sie eine entsprechende Implementation. Lösen Sie das Problem für $\alpha = 0.5$ und Visualisieren Sie die Lösung. Bestimmen Sie eine EOC-Tabelle.