Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 16.10.2008
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dr. B. Haasdonk

Aufgaben zum Praktikum

Numerik Partieller Differentialgleichungen I

WS 2008/2009 — Blatt 1

Abgabe: 22.10.2008 per Email

Aufgabe 1 (Finite Differenzen Verfahren: Klassenkonzept)
Wir betrachten eine skalaren Erhaltungsgleichung in einer Raum-Dimension

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) &= 0 \quad \text{in } \Omega \times [0,T] \\ u(x,0) &= u_0(x) \text{ in } \Omega \\ u(x,t) &= u_{dir}(x,t) \text{ in } \Gamma_{dir}. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $T > 0$ die Endzeit, $\Omega = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $f \in C^1(\mathbb{R})$ die Flussfunktion, u_0 stückweise stetige, beschränkte Anfangsdaten und u_{dir} beschränkte Dirichlet-Randdaten, die auf dem Einfluss-Rand $\Gamma_{dir}(t) := \{x \in \partial\Omega | f'(u)n < 0\}$ mit äußerer Einheitsnormalen n vorgeschrieben werden. Der übrige Rand $\partial\Omega \backslash \Gamma_{dir}$ ist Ausfluss-Rand, auf dem keine Bedingungen vorgegeben werden.
Die Diskretisierung dieser Gleichung soll mittels expliziten Finite Differenzen Verfahren realisiert werden. Hierzu sei K die Anzahl der Zeitintervalle, $\Delta t := T/K$ die Zeitschrittweite und es bezeichnen $t^k := k\Delta t, k = 0, \ldots, K$ die diskreten Zeitpunkte. Es seien die N Gitterpunkte im Ort gegeben als $G := \{x_n\}_{n=1}^N$ mit $a = x_1 < \ldots < x_N = b$. Das Gitter G definiert den Raum der reellwertigen Gitterfunktionen $V_h := \{v_h : \{x_n\}_{n=1}^N \to \mathbb{R}\}$. Durch das finite Differenzen Verfahren wird eine Sequenz von diskreten Funktionen $u_h^k \in V_h$ generiert, indem eine Anfangsprojektion $u_h^0 := P_h(u_0)$ durchgeführt wird und anschließend sequenziell $u_h^{k+1} := u_h^k + \Delta t L_h(u_h^k)$ mit dem Ortsdiskretisierungsoperator $L_h : V_h \to V_h$ berechnet wird. Der Projektionsoperator und Ortsdiskretisierungsoperator sind punktweise definiert durch $(P_h(u_0))(x_n) := u_0(x_n)$ und $(L(v_h))(x_n) := -\left(\frac{1}{\Delta x_n}[g(v_n, v_{n+1}) - g(v_{n-1}, v_n)]\right)$ mit numerischem Fluss g, Ortsschrittweite Δx_n und je nach Randtyp sinnvoll definierten Werten v_0 und v_{N+1}.

a) Entwerfen Sie ein objektorientiertes Klassenkonzept, d.h. geben Sie für die untenstehenden (und eventuell weiteren) notwendigen Klassen die Schnittstelle an, d.h. Methoden mit Argumenten und kurzer Funktionsbeschreibung. Wie hängen die Klassen zusammen und wie kann das durch Konstruktoren und Membervariablen berücksichtigt werden? Welche Methoden und Argumente können als const deklariert werden?

b) Schreiben Sie in wenigen Zeilen Pseudo-Code ein Hauptprogramm, das mit Hilfe der Klassen die Finite Differenzen Simulation durchführt.

Einige wichtigen Strukturen sind die folgenden:

Model: Eine Sammlung der Datenfunktionen der Differentialgleichung, d.h. Klasse, welche Punktauswertung der Flussfunktion, Anfangs- und Randwerte erlaubt.

Grid: Eine Klasse, die die Geometrieinformationen verwaltet, d.h. Iteration über die Punkte, Zugriff auf Punkte und Punktabstände, Information darüber, ob ein Punkt Randpunkt ist, äußere Normalen zu Randpunkten.

DiscreteFunction: Eine Klasse, die eine diskrete Funktion $v_h \in V_h$ darstellt, d.h. einen Freiheitsgrad für jeden Gitterknoten besitzt, Setzen und Auslesen von Funktionswerten erlaubt, und die Ausgabe der Funktionswerte auf den Bildschirm oder in eine Textdatei ermöglicht.

Projection: Eine Klasse, die eine Projektion der Anfangsdaten $v_h := P_h[u_0]$ durchführt.

DiscreteSpaceOperator: Eine Klasse, die die Anwendung des diskreten Ortsoperators $v_h = L_h[w_h]$ realisiert.

NumericalFlux: Eine Klasse, die einen numerischen Fluss repräsentiert.