Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dr. B. Haasdonk 20.12.2007

Aufgaben zum Praktikum

Wissenschaftliches Rechnen

WS 2007/2008 — Blatt 5

Aufgabe 1 (Dune-FEM Diskrete Funktionen)
Für die folgenden Aufgaben sei verwiesen auf die Online-Dokumentation von `Dune-FEM` unter `http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Research/projectskr/dune/`. Als Gitter soll der Einheitswürfel verwendet werden, der mit einem `ALUSimplexGrid` diskretisiert ist. Es soll jeweils ein `LeafGridPart` und eine `AdaptiveDiscreteFunction` verwendet werden.

(a) Legen Sie eine Funktion mit Hilfe der Klasse `DiscontinuousGalerkinSpace` an, welche elementweise konstant ist. Dies erfordert vorheriges Anlegen eines Funktionenraumes, eines Gridparts und eines diskreten Funktionenraumes. Führen Sie eine DOF-Iteration ueber die diskrete Funktion durch und weisen Sie jedem Freiheitsgrad seine Nummer in der Aufzählung zu. Visualisieren Sie die resultierende diskrete Funktion in Grape mit Hilfe der `GrapeDataDisplay` Klasse.

(b) Legen Sie eine stetige elementweise lineare diskrete Funktion mit Hilfe der Klasse `LagrangeDiscreteFunctionSpace` an. Die analytische Funktion $f(x) = x_1(1 - x_1)(1 - x_2)\cos(\pi x_3)$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ soll in dem diskreten Funktionenraum interpoliert werden. Führen Sie diese Interpolation durch, indem Sie in einem Gitterdurchlauf über die Elemente jeweils die lokalen Freiheitsgrade durch Auswertung der Funktion f bestimmen (Hinweis: `localFunction(ElementType& el)` in der diskreten Funktion erlaubt Zugriff auf die lokalen Freiheitsgrade). Die lokalen Koordinaten der Lagrangepunkte sind über den `LagrangePointSet` in dem diskreten Funktionenraum verfügbar. Visualisieren Sie die Funktion in Grape.

Aufgabe 2 (Dune-FEM Finite Elemente)
Im Folgenden soll ein elliptisches Randwertproblem mit Hilfe von Finiten Elementen erster Ordnung in 3D gelöst werden. Das Gebiet sei $\Omega := [-1, 1]^3 \backslash [0, 1]^3$ mit Dirichletrand $\Gamma_D = \partial\Omega \cap [0, 1]^3$ und Neumann-Rand $\Gamma_N := \partial\Omega \backslash \Gamma_D$. Für ein festes $\alpha \in (0, 1)$ ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x)\nabla u(x)) &= f(x) \quad \text{in } \Omega, \\ u(x) &= g_D(x) \quad \text{auf } \Gamma_D, \\ (a(x)\nabla u(x)) \cdot n(x) &= g_N(x) \quad \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $n(x)$ die äußere Einheitsnormale im Punkt $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ auf dem Rand, $a(x) = x_1 + 2$, $f(x) = -\|x\|^{\alpha-2}(2x_1 - \alpha x_1 - 2\alpha - 2)$, $g_D(x) = \|x\|^{\alpha}$ und $g_N(x) = \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x_1 + 2)x \cdot n$. Bestandteile Ihres Programmes sollen werden:

Makrogitter: Erstellen Sie ein geeignetes Makrogitter im DGF-Format.

Modell: Schreiben Sie eine Modell-Klasse, welche die Datenfunktionen des Randwertproblems enthält.

Diskreter Funktionenraum: Es soll ein `LagrangeDiscreteFunctionSpace` erster Ordnung verwendet werden.

Matrix: Die Systemmatrix soll in einer selbst geschriebenen Matrixklasse repräsentiert werden. Die Schnittstelle ergibt sich hierbei unter anderem durch die Anforderungen der Gleichungssystemlöser. Die Matrix soll assembliert werden durch Akkumulation der Element-Beiträge.

Rechte Seite: Die rechte Seite des Gleichungssystems kann als diskrete Funktion repräsentiert und assembliert werden.

Randbehandlung: Nach dem Assemblieren der Matrix und der rechten Seite soll eine Randbehandlung der Dirichlet-Zeilen im Gleichungssystem erfolgen.

Gleichungssystemlöser: Es soll ein geeigneter iterativer Gleichungssystemlöser aus Dune-FEM verwendet werden zum Lösen des resultierenden Gleichungssystems.

Fehlerbestimmung: Schreiben Sie eine Routine zur Berechnung des Fehlers $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ der erhaltenen diskreten Lösung u_h zur exakten Lösung $u(x) = \|x\|^{\alpha}$.

Realisieren Sie eine entsprechende Implementation. Lösen Sie das Problem für $\alpha = 0.5$ und Visualisieren Sie die Lösung. Bestimmen Sie eine EOC-Tabelle.

Hierauf aufbauende Projektthemen können sein:

- Erweitern des Problems um weitere Terme in der Differentialgleichung.
- Hinzufügen von lokaler Adaption des Gitters basierend auf einer Lösungsabhängigen Verfeinerungsstrategie.
- Hinzufügen einer Zeitschleife zum Lösen eines zeitabhängigen parabolischen Problems.
- Implementation und Experimentieren mit verschiedenen Vorkonditionierungsverfahren, verschiedenen Lösern und Symmetrisierung des Gleichungssystems.
- Realisierung von Parallelisierung des Problems.