

Optimierung der Geometrie eines Kühlkörpers

Johann Jakob Preuß Jan Michael Schulte

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

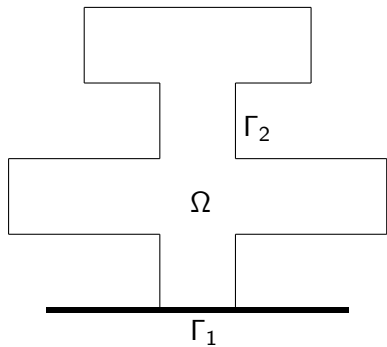


Abschlusspräsentation, 2. Februar 2009

- 1 Modellierung
- 2 Lösung auf Ausgangs- und Referenzgebiet
- 3 Optimierung der Geometrie
- 4 Umsetzung in COMSOL

- Ein Kühlkörper dient dazu, empfindliche Bauteile vor zu hohen Temperaturen zu schützen.
- Da viele technische Geräte ein hohes Maß an Wärme produzieren, finden sich vielfältige Anwendungsmöglichkeiten.
- Ziel ist es hierbei, möglichst viel Wärme von der Quelle an die Umgebung abzuführen.
- Aufgrund der günstigen physikalischen Eigenschaften werden die meisten Kühlkörper aus Metall hergestellt.
- Zusätzlich wird die Kontaktfläche zur Umgebungsluft durch so genannte Kühlrippen vergrößert.

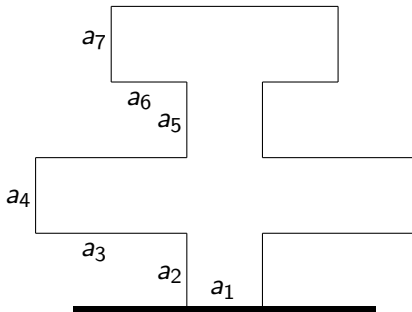
Ein typischer Kühlkörper



Bezeichnungen

- Ω : Gebiet
- Γ_1 : Rand an der Wärmequelle
- $\Gamma_2 := \partial\Omega \setminus \Gamma_1$

Herleitung des Modells



Annahmen

- zwei Kühlrippen
- symmetrischer Aufbau
- hohe Wärmeleitfähigkeit des Materials

Annahme

Es gibt keine Wärmequellen oder -senken in Ω , d. h. für beliebige Volumen V in Ω gilt, dass ihre Wärmebilanz ausgeglichen ist.

$$0 = \int_{\partial V} \sigma \nabla u \cdot n \stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \int_V \nabla \cdot (\sigma \nabla u)$$
$$\stackrel{V \text{ beliebig}}{\implies} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \text{ auf } \Omega \quad (1)$$

Annahme

konstanter Wärmefluss q von der Wärmequelle durch Γ_1

Neumann-Randbedingungen:

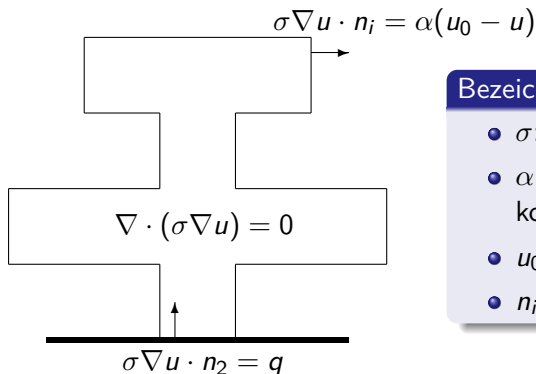
$$\sigma \nabla u \cdot n = q \text{ auf } \Gamma_1 \quad (2)$$

Annahme

Wärmefluss durch den Rand Γ_2 ist (lokal) proportional zur Temperaturdifferenz $u_0 - u$

Robin-Randbedingungen:

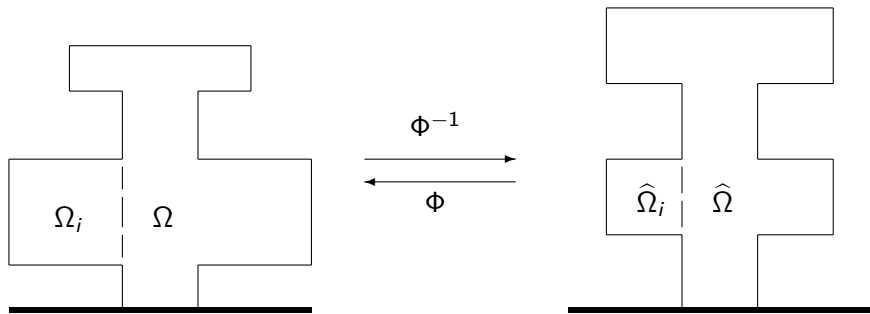
$$\sigma \nabla u \cdot n = \alpha(u_0 - u) \text{ auf } \Gamma_2 \quad (3)$$



Bezeichnungen

- σ : Wärmeleitfähigkeit
- α : Wärmedurchgangskoeffizient
- u_0 : Außentemperatur
- n_i : äußere Normale

Transformation auf Referenzgebiet



Φ ist in unserem Fall stetig und stückweise affin-linear. Es gilt

$$\Phi(\hat{x})|_{\hat{\Omega}_i} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Bezeichnungen

$$\hat{x} = \Phi^{-1}(x)$$

$$\hat{u} = u(\Phi(\hat{x}))$$

$$G = D_x \Phi^{-1}(\Phi(\hat{x}))$$

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}_1} G_{11} & \cdots & \partial_{\hat{x}_n} G_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{\hat{x}_1} G_{1n} & \cdots & \partial_{\hat{x}_n} G_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten:

$$\nabla_x \cdot (\sigma \nabla_x u) = \sigma \nabla_{\hat{x}} \cdot (GG^t \nabla_{\hat{x}} \hat{u}) - \sigma \tilde{v} \cdot G^t \nabla_{\hat{x}} \hat{u} \quad (4)$$

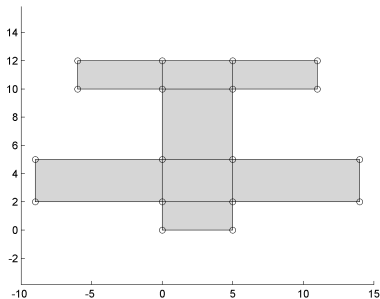
In unserem Fall vereinfacht sich die Gleichung (4) aufgrund der Gestalt von Φ und wir erhalten insgesamt als transformiertes Problem auf dem Referenzgebiet:

$$\nabla \cdot (\sigma G G^t \nabla \hat{u}) = 0 \quad \text{in } \hat{\Omega}$$

$$(\sigma G^t \nabla \hat{u}) \cdot N = q \quad \text{auf } \hat{\Gamma}_1$$

$$(\sigma G^t \nabla \hat{u}) \cdot N = \alpha(u_0 - \hat{u}) \quad \text{auf } \hat{\Gamma}_2$$

Wir betrachten folgendes Beispiel für die Lösung auf Ausgangs- und Referenzgebiet:



Konstanten

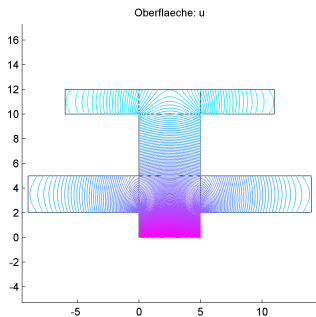
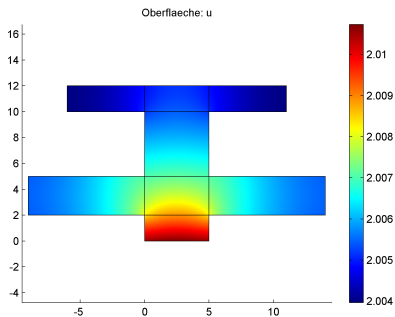
$$\sigma = 1000$$

$$\alpha = 10$$

$$u_0 = 20$$

$$q = 200$$

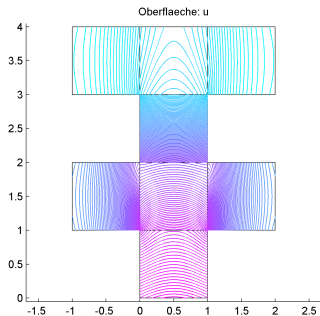
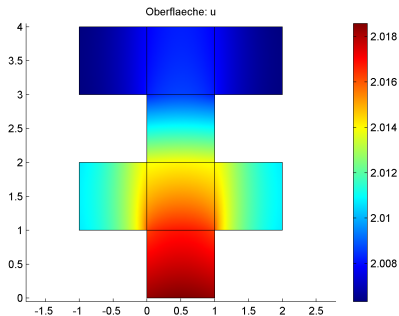
Als Lösung auf dem Ausgangsgebiet erhalten wir folgende Temperaturverteilung:



Es ergibt sich hierbei:

$$\frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}{|\Omega|} = 4.02$$

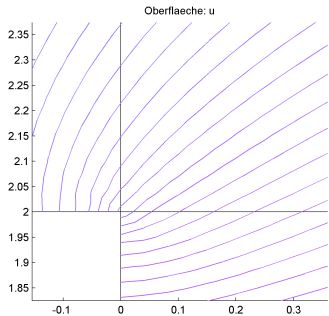
Auf dem Referenzgebiet erhalten wir entsprechend die Lösung:



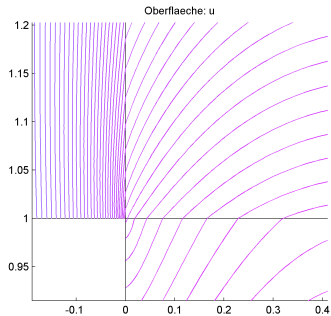
Es ergibt sich diesfalls:

$$\frac{\|\hat{u}\|_{L^2(\hat{\Omega})}^2}{|\hat{\Omega}|} = 4.05$$

Innere Ränder



Innere Ränder beim Ausgangsgebiet



Innere Ränder beim Referenzgebiet

Ziel ist es nun, die Geometrie der Kühlrippe so zu optimieren, dass möglichst viel Wärme von der Quelle abgeführt wird.

Wir betrachten zunächst das Zielfunktional:

$$J(u, a) = \frac{1}{2|\Omega|} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \sum_{i=1}^7 |a_i - \bar{a}_i|^2 \quad (5)$$

Bezeichnungen

β : Regularisierungsparameter

\bar{a}_i : Referenzgröße für die Seitenlängen

a_i : Seitenlängen der Geometrie

Da Ω von $a := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{pmatrix}$ abhängt, ist (5) nicht zweckmäßig.

Wir betrachten stattdessen das äquivalente Funktional auf dem Referenzgebiet:

$$\hat{J}(\hat{u}, a) = \frac{1}{2|\hat{\Omega}|} \|\hat{u}\|_{L^2(\hat{\Omega})}^2 + \beta \sum_{i=1}^7 |a_i - \bar{a}_i|^2 \quad (6)$$

Dieses Funktional soll nun unter Einhaltung der Differentialgleichung minimiert werden.

(Zur Vereinfachung der Notation verzichten wir fortan auf das $\hat{\cdot}$.)

Wir stellen jetzt die Lagrange-Funktion mit der adjungierten Variablen λ auf:

$$\begin{aligned} L(u, \lambda, a) = & J(u, a) + (-\nabla \cdot (\sigma G G^t \nabla u), \lambda)_{\Omega} \\ & + (-Gq, \lambda)_{\Gamma_1} \\ & + (-\alpha G(u_0 - u), \lambda)_{\Gamma_2} \end{aligned} \quad (7)$$

Hierfür betrachten wir nun den Ansatz:

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(u + \varepsilon\psi, \lambda + \varepsilon\pi, a + \varepsilon\chi)|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (8)$$

Der Ansatz (8) führt dann auf die Euler-Lagrange-Gleichungen. Betrachten wir ein rechteckiges Gebiet Ω mit Seitenlängen a_1 und a_2 , so sehen diese zunächst folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}(u, \Psi)_{\Omega} + \sigma (GG^t \nabla \Psi, \nabla \lambda)_{\Omega} + \alpha (G^t \Psi, \lambda)_{\Gamma_2} \\ = 0 \quad \forall \Psi \in H^1(\Omega)\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}\sigma (GG^t \nabla u, \nabla \pi)_{\Omega} - (Gq, \pi)_{\Gamma_1} - \alpha (G(u_0 - u), \pi)_{\Gamma_2} \\ = 0 \quad \forall \pi \in H^1(\Omega)\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\sigma \left(\begin{pmatrix} 2a_1 \chi_1 & 0 \\ 0 & 2a_2 \chi_2 \end{pmatrix} \nabla u, \nabla \lambda \right)_{\Omega} + 2\beta (a - \bar{a}, \chi) \\ = 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^2\end{aligned}\tag{11}$$

Dabei beschreibt

- Gleichung (9) das duale Problem,
- Gleichung (10) das primale (Ausgangs-) Problem, und
- Gleichung (11) den Kontrollparameter a .

Insbesondere erhalten wir aus Gleichung (11) durch Einsetzen der Basisvektoren $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung für die Seitenlängen a_1 bzw. a_2 .

Zur Berechnung der optimalen Seitenlängen a_1 und a_2 ergibt sich die Formel

$$a_i = \frac{2\beta\bar{a}_i}{2\beta + 2\sigma (\partial_i u, \partial_i \lambda)_{L^2(\Omega)}}, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Eine effiziente und elegante Möglichkeit zur Lösung des Optimierungsproblems besteht darin, ein einzelnes System aus (9), (10) und (11) aufzustellen.

Dieses System kann anschließend auf zwei verschiedene Arten gelöst werden:

- 1 Iterative approach
- 2 One shot approach

Vorteile

- Zu lösende Systeme sind von der Größe des primalen Problems.
- Verschiedene Optimierungsroutinen können angewandt werden.

Nachteil

- Effizienzprobleme bei der Umsetzung in Comsol (globale Variablen!)

Vorteil

- effiziente Implementation in Comsol i. A. möglich

Nachteil

- Zu lösendes, gekoppeltes System ist doppelt so groß wie das primale Problem.

Iterative approach:

- Berechnung der optimalen Seitenlängen unmöglich

One shot approach:

- gleichzeitiges Lösen von (9), (10) und (11) in COMSOL nicht ohne weiteres möglich

Um diese Probleme zu umgehen, bietet sich folgender Ansatz an:

- 1 gleichzeitiges Lösen von (9) und (10)
- 2 Berechnung der Seitenlängen durch (12).

Dabei wird durch entsprechende Wahl des Regularisierungsparameters β sichergestellt, dass die Seitenlängen positiv sind.

Dieses Verfahren wird nun mehrfach iteriert, bis Konvergenz eintritt.

Parameter

$$\sigma = 1000,$$

$$\alpha = 10,$$

$$u_0 = 10,$$

$$q = 20,$$

$$\beta = 55,$$

$$\bar{a}_1 = 6,$$

$$\bar{a}_2 = 4.$$

Das Verfahren konvergiert
dann gegen die optimale
Lösung

$$a_1 = 6.24$$

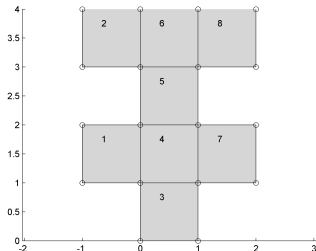
$$a_2 = 4.15$$

Um das Problem auf dem gesamten Gebiet zu lösen, gehen wir folgendermaßen vor:

- Anpassung der Matrix G in den Gleichungen (9), (10) und (11) für die einzelnen Teilgebiete
- Behandlung der inneren Ränder
- Summation über alle Teilgebiete

Für die algebraische Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} & \sigma \left(\left(\begin{array}{cc} 2a_3\chi_1 & 0 \\ 0 & 2a_4\chi_2 \end{array} \right) \nabla u, \nabla \lambda \right)_{\Omega_1} \\ & + \dots \\ & + \sigma \left(\left(\begin{array}{cc} 2a_6\chi_1 & 0 \\ 0 & 2a_7\chi_2 \end{array} \right) \nabla u, \nabla \lambda \right)_{\Omega_8} \\ & + 2\beta(a - \bar{a}, \chi) = 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^7. \end{aligned}$$

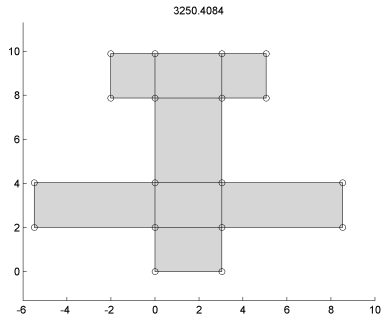


Die resultierenden Lösungsformeln für die Seitenlängen a_i unterscheiden sich von Gleichung (12) nur, wenn a_i für mehrere Teilgebiete verwendet wird.

Beispiel 1 ...

$$\begin{aligned}\sigma &= 10\,000, \\ \alpha &= 10, \\ u_0 &= 20, \\ q &= 20, \\ \beta &= 8.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= 3, \\ \bar{a}_2 &= 2, \\ \bar{a}_3 &= 5, \\ \bar{a}_4 &= 2, \\ \bar{a}_5 &= 3, \\ \bar{a}_6 &= 2, \\ \bar{a}_7 &= 2.\end{aligned}$$



Geometrie nach wenigen Iterationen

... Beispiel 1

$$\bar{a}_1 = 3.05,$$

$$\bar{a}_2 = 2.01,$$

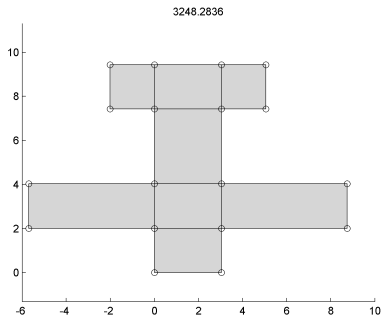
$$\bar{a}_3 = 5.70,$$

$$\bar{a}_4 = 2.02,$$

$$\bar{a}_5 = 3.40,$$

$$\bar{a}_6 = 2.01,$$

$$\bar{a}_7 = 2.01.$$

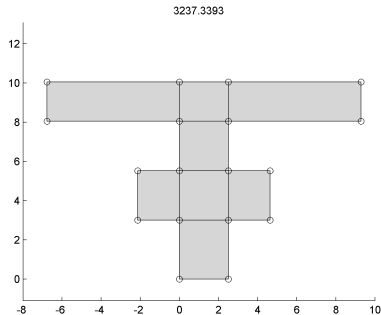


Geometrie nach ausreichend vielen
Iterationen

Beispiel 2 ...

$$\begin{aligned}\sigma &= 100\,000, \\ \alpha &= 10, \\ u_0 &= 20, \\ q &= 20, \\ \beta &= 10.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= 2.5, \\ \bar{a}_2 &= 3, \\ \bar{a}_3 &= 2, \\ \bar{a}_4 &= 2.5, \\ \bar{a}_5 &= 2.5, \\ \bar{a}_6 &= 6, \\ \bar{a}_7 &= 2.\end{aligned}$$



Geometrie nach wenigen Iterationen

$$\bar{a}_1 = 2.51,$$

$$\bar{a}_2 = 3.01,$$

$$\bar{a}_3 = 2.01,$$

$$\bar{a}_4 = 2.51,$$

$$\bar{a}_5 = 2.51,$$

$$\bar{a}_6 = 6.77,$$

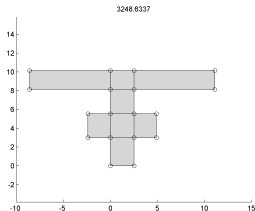
$$\bar{a}_7 = 2.00.$$



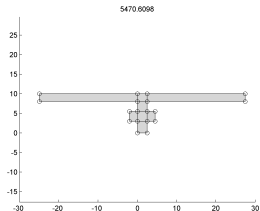
Geometrie nach ausreichend vielen
Iterationen

Beispiel 3

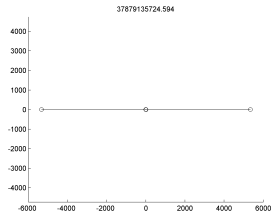
Die Abhängigkeit des Verfahrens von der richtigen Wahl des Parameters β sieht man leicht an folgendem Beispiel. Hierbei wurde β im Vergleich zum letzten Beispiel nur geringfügig verkleinert.



Geometrie nach wenigen Iterationen



Geometrie nach mehreren Iterationen



Geometrie nach ausreichend vielen Iterationen

Fazit:

- Gute Konvergenz der Lösung für Referenzparameter, die innerhalb enger Grenzen liegen.
- Außerhalb dieser Grenzen explodiert die Lösung oder konvergiert gegen unrealistische Werte.

Mögliche Verbesserungen:

- Verwendung eines anderen Zielfunktional (z. B. Beobachtungsrand)
- vollständige Implementation eines „One shot“-Ansatzes
- Verbesserung des Konvergenzverhaltens und der Stabilität

Wir bedanken uns bei

- Prof. Dr. Mario Ohlberger
- Dr. Christina Stöcker, Fraunhofer MEVIS, Bremen
- Dipl.-Math. Bahne Christiansen
- Prof. Dr. Thomas Slawig, Christian-Albrechts-Universität, Kiel



Thomas Slawig,
PDE-constrained control using Comsol Multiphysics - Control
of the Navier-Stokes equations:

http://www.math.tu-berlin.de/preprints/files/optpde/ppr2005_26.pdf



Thomas Slawig et al.,
Strategies for time-dependent PDE:
<http://www.math.tu-berlin.de/~pruefert/Strategies-for-time-dependent-PDE-control/index.html>



R. Becker, H. Kapp und R. Rannacher,
Adaptive Finite Element Methods for Optimization Problems:
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=B09AA9B4209AE94D0716994FE3B98278?doi=10.1.1.35.2242&rep=rep1&type=pdf>

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!