Kapitel 4

Evolutionsgleichungen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit (parabolischen) Differentialgleichungen der Form

$$\partial_t u + Au = f, \qquad t \in (0,T) \tag{4.1}$$

mit Anfangswert

$$u(t=0) = u_0 \tag{4.2}$$

beschäftigen. Hier ist A zunächst ein (eventuell unbeschränkter) linearer Operator auf einem Hilbertraum H, z.B. ein elliptischer Differentialoperator

$$Au = -\nabla \cdot (a\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu \tag{4.3}$$

auf $L^2(\Omega)$.

Solche partiellen Differentialgleichungen können wir als gewöhnliche Differentialgleichungen in einem Hilbertraum H interpretieren. Es liegt nahe, analoge Resultate wie den Satz von Peano oder den Satz von Picard-Lindelöf in Hilberträumen anzuwenden, dies scheitert allerdings an einer prinzipiellen Schwierigkeit: da die lineare Abbildung unbeschränkt ist, fehlt die Voraussetzung der Stetigkeit (Peano) bzw. Lipschitz-Stetigkeit (Picard-Lindelöf). Wir werden also eine alternative Theorie entwickeln müssen, die eher strukturelle Eigenschaften des Operators A berücksichtigt.

4.1 Schwache Lösungen

Um (4.1) mit dem Operator (4.3) zu betrachten, können wir die analoge Definition $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ wie im letzten Kapitel verwenden. D.h. wir suchen eine Funktion u, sodass $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ und

$$\partial_t u(t) = -Au(t) + f(t) \in H^{-1}(\Omega)$$

für fast alle $t \in (0,T)$ gelten. Also werden wir

$$u \in \mathcal{V}_p := L^p(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,p}(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

suchen, es stellt sich nur die Frage nach der richtigen Wahl von p. Dies hängt auch von der Regularität von f und vor allem u_0 ab. Wir sehen dies einfach für die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u = \Delta u, \tag{4.4}$$

mit homogenen Randwerten, wenn wir mit $\partial_t u$ multiplizieren und bezüglich Ort und Zeit integrieren. Es folgt dann

$$\begin{aligned}\int_0^s \int_\Omega (\partial_t u)^2 \; dx \; dt &= \int_0^s \int_\Omega \Delta u \; \partial_t u \; dx \; dt = -\int_0^s \int_\Omega \nabla u \cdot \partial_t \nabla u \; dx \; dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx \; dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(s)|^2 \; dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_0|^2 \; dx.\end{aligned}$$

Es folgt daraus insbesondere

$$\int_\Omega |\nabla u(s)|^2 \; dx \leq \int_\Omega |\nabla u_0|^2 \; dx$$

für fast alle $s \in (0,T)$. Ist also $u_0 \in H^1(\Omega)$, dann erhalten wir $u(t) \in H^1(\Omega)$ für fast alle t mit einer gleichmässigen Schranke, d.h. es liegt nahe $p = \infty$ zu wählen. Andererseits könnte man wegen der Glättungseigenschaften einer parabolischen Differentialgleichung (siehe den entsprechenden Abschnitt zur Wärmeleitungsgleichung) auch vermuten dass eine vernünftige Lösung existiert, wenn nur $u_0 \in L^2(\Omega)$ gilt. In diesem können wir die Gleichung mit u multiplizieren und integrieren, was die a-priori Abschätzung

$$\int_\Omega u(s)^2 \; dx + 2\int_0^s \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \; dx \; dt \leq \int_\Omega u_0^2 \; dx. \tag{4.5}$$

Also erwarten wir in diesem Fall nur $p = 2$. Solche *a-priori Abschätzungen* werden später nützlich sein um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen nachzuweisen. Wir beginnen unsere Analyse mit einer Approximation, die die Verwendung von Resultaten über gewöhnliche Differentialgleichungen anwendbar macht.

4.1.1 Galerkin-Approximation

Um die Existenz einer Lösung nachzuweisen, führen wir zunächst eine endlichdimensionale Approximation im Ort durch, die übrigens völlig analog zur Konstruktion einer Klasse von numerischen Verfahren (Galerkin-Verfahren) ist. Dazu wählen wir zunächst eine Basis $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $H_0^1(\Omega)$, die existiert da der Raum separabel ist, also lässt sich jedes $u \in H_0^1(\Omega)$ eindeutig in der Form

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\psi_k \tag{4.6}$$

mit einer Koeffizientenfolge $(c_k(t)) \in \ell^2(\mathbb{N})$ darstellen. Zur Vereinfachung der späteren Analyse wählen wir die ψ_j als Eigenfunktionen des Operators $(-\Delta + I)^{-1}$ mit homogenen Randwerten. Wir suchen nun eine Approximation der Form

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\psi_k, \tag{4.7}$$

die allerdings nicht die Differentialgleichung selbst erfüllt, sondern die Variationsgleichung

$$\langle \partial_t u^N, \varphi \rangle + \langle A u^N, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \text{ span } \{\psi_j\}_{j=1,\dots,N}. \tag{4.8}$$

Genauso gehen wir bezüglich der Anfangsbedingung vor und fordern

$$\langle u^N(0), \varphi\rangle = \langle u_0, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \text{ span } \{\psi_j\}_{j=1,\dots,N}. \tag{4.9}$$

Die Einschränkung der Testfunktionen auf die lineare Hülle der ersten N Basisfunktionen erlaubt es ein lösbares System zu erhalten. Wegen der Linearität des Systems genügt es die Testfunktionen $\varphi = \psi_k$, $k = 1, \dots, N$ zu wählen und man erhält nach Einsetzen des Ansatzes für u^N das System

$$\sum_{j=1}^N \frac{dc_j^N}{dt}(t)\langle \psi_j, \psi_k\rangle = -\sum_{j=1}^N c_j^N(t)\langle A\psi_j, \psi_k\rangle + \langle f, \varphi_k\rangle. \tag{4.10}$$

Definieren wir nun Matrizen $\mathbf{L}^N$ und $\mathbf{M}^N$ durch

$$\mathbf{L}_{jk}^N = \langle \psi_j, \psi_k\rangle, \qquad \mathbf{M}_{jk}^N = \langle A\psi_j, \psi_k\rangle \tag{4.11}$$

sowie Vektoren $\mathbf{c}^N$ und $\mathbf{f}^N$ durch

$$\mathbf{c}^N = (c_j^N)_{j=1,\dots,N} \qquad \mathbf{f}^N = (\langle f, \psi_j\rangle)_{j=1,\dots,N}, \tag{4.12}$$

dann kann das lineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen (4.10) auch als

$$\frac{d}{dt}\mathbf{c}^N(t) = -(\mathbf{L}^N)^{-1}\mathbf{M}^N\mathbf{c}^N(t) + (\mathbf{L}^N)^{-1}\mathbf{f}^N(t) \tag{4.13}$$

geschrieben werden. Man beachte dabei, dass die Matrix $\mathbf{L}^N$ invertierbar ist wegen linearen Unabhängigkeit der ψ_j. Falls $\mathbf{f}^N$ stetig von der Zeit abhängt sind alle Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt und das Differentialgleichungssystem (4.13) mit Anfangswert

$$\mathbf{c}^N(0) = (\langle u_0, \psi_j\rangle)_{j=1,\dots,N} \tag{4.14}$$

hat für alle $N \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{c}^N \in C^1([0,T])$. Damit können wir wegen der Äquivalenz sofort auf die Existenz einer Lösung u^N von (4.8) schliessen:

Lemma 4.1. *Sei $f \in C(0,T; H^{-1}(\Omega))$ und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Dann existiert eine eindeutige Lösung*

$$u^N \in C^1(0,T; H^1(\Omega)) \subset \mathcal{V}_\infty$$

von (4.8), (4.9) mit $u^N(t) \in$ span $\{\psi_j\}_{j=1,\dots,N}$ für alle $t \in (0,T)$. Die Lösung u^N ist gleichmässig (bezüglich N) beschränkt in $\mathcal{V}_2$.

Beweis. Die Existenz von u^N folgt direkt aus dem speziellen Ansatz und dem obigen Argument für die Differentialgleichung der Koeffizienten. Um eine a-priori Abschätzung zu erhalten wählen wir die Testfunktion $\varphi = u^N$ in (4.8) und integrieren bezüglich t. Dann gilt

$$\frac{1}{2}\|u(s)^N\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|u^N(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^s \langle Au^N, u^N\rangle\ dt = \int_0^s \langle f, u^N\rangle\ dt.$$

Die rechte Seite schätzen wir mit der Young'schen Ungleichung ab als

$$\int_0^s \langle f, u^N\rangle\ dt \leq \frac{\epsilon}{2}\int_0^s \|u^N\|_{H^1}^2\ dt + \frac{1}{2\epsilon}\int_0^s \|f\|_{H^{-1}}^2\ dt$$

für beliebiges $\epsilon > 0$. Für den zweiten Term auf der linken Seite verwenden wir (4.9) mit Testfunktion $\varphi = u^N$ und die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\|u^N(0)\|_{L^2}^2 = \langle u^N(0), u^N(0)\rangle = \langle u_0, u^N(0)\rangle \leq \|u_0\|_{L^2}\|u^N(0)\|_{L^2},$$

d.h. $\|u^N(0)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}$. Für den dritten Term setzen wir die spezielle (schwache) Form des Operators A ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\langle Au^N, u^N\rangle &= \int_\Omega (a|\nabla u^N|^2 + b\cdot\nabla u^N u^N + c(u^N)^2)\ dx \\
&\geq \alpha\int_\Omega(|\nabla u^N|^2 + \frac{1}{2}|u^N|^2)\ dx - \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u^N|^2\ dx + \int_\Omega (c - \frac{\alpha}{2} - \frac{|b|^2}{2\alpha})(u^N)^2\ dx \\
&\geq \frac{\alpha}{2}\|u^N\|_{H^1}^2 - C\|u^N\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

wobei C eine obere Schranke für $\frac{\alpha}{2} + \frac{|b|^2}{2\alpha} - c$ ist. Also erhalten wir zusammen

$$\|u(s)^N\|_{L^2}^2 + (\alpha - \epsilon)\int_0^s \|u^N\|_{H^1}^2\ dt \leq 2C\int_0^s \|u^N\|_{L^2}^2\ dt + \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\epsilon}\int_0^s \|f\|_{H^{-1}}^2\ dt. \tag{4.15}$$

Daraus erhalten wir insbesondere

$$\|u(s)^N\|_{L^2}^2 \leq 2C\int_0^s \|u^N\|_{L^2}^2\ dt + \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\epsilon}\int_0^T \|f\|_{H^{-1}}^2\ dt.$$

und können für die Variable $\|u(s)^N\|_{L^2}^2$ das Lemma von Gronwall anwenden. Dies impliziert $\|u(s)^N\|_{L^2} \leq c$ mit einer nur von T, u_0 und f abhängigen Konstante. Neuerliches Einsetzen in (4.15) liefert (mit der sinnvollen Wahl $\epsilon > \alpha$

$$\int_0^T \|u^N\|_{H^1}^2\ dt \leq \frac{1}{\alpha - \epsilon}\left(2CTc^2 + c^2 + \frac{1}{\epsilon}\int_0^T \|f\|_{H^{-1}}^2\ dt\right),$$

also eine gleichmässige Schranke für u^N in $L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

Wir wählen nun als Testfunktion in (4.8) $\varphi = (-\Delta + I)^{-1}\partial_t u^N$, was erlaubt ist da wir die ψ_j als Eigenfunktionen des Operators gewählt haben, d.h. $(-\Delta + I)^{-1}\partial_t u^N$ liegt wieder in span $\{\psi_j\}_{j=1,\dots,N}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\partial_t u^N\|_{H^{-1}}^2\ dt &= \int_0^T \langle \partial_t u^N, (-\Delta + I)^{-1}\partial_t u^N\rangle\ dt \\
&\leq \int_0^T (\|f\|_{H^{-1}} + \|Au^N\|_{H^{-1}})\|(-\Delta + I)^{-1}\partial_t u^N\|_{H^1}\ dt \\
&\leq \int_0^T (\|f\|_{H^{-1}} + \|A\|\|u^N\|_{H^1})\|\partial_t u^N\|_{H^{-1}}\ dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^T \left((\|f\|_{H^{-1}} + \|A\|\|u^N\|_{H^1})^2 + \|\partial_t u^N\|_{H^{-1}}^2\right)\ dt.
\end{aligned}$$

Mit der oben hergeleiteten gleichmässigen Schranke für u^N in der Norm von $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ erhalten wir daraus eine gleichmässige Schranke für $\partial_t u^N$ in der Norm von $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.
□

4.1.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Um die Existenz schwacher Lösungen für die Evolutionsgleichung (4.1) nachzuweisen, werden wir die a-priori Schranken in (4.1) und schwache Konvergenz von Teilfolgen benutzen. Um dann in (4.8) und (4.9) zum Grenzwert überzugehen werden wir auch die Konvergenz von Testfunktionen benötigen. Dazu zunächst ein Hilfsresultat über die Konvergenz von Produkten:

Lemma 4.2. *Sei X ein Banachraum und φ_k eine (stark) konvergente Folge in X mit Grenzwert φ. Falls u_k eine beschränkte und schwach*-konvergente Folge in X^* mit Grenzwert u ist, dann gilt*

$$\langle u_k, \varphi_k \rangle \to \langle u, \varphi \rangle. \tag{4.16}$$

Beweis. Es gilt

$$\langle u_k, \varphi_k \rangle \quad = \quad \langle u_k, \varphi_k - \varphi \rangle + \langle u_k, \varphi \rangle$$

Der erste Term auf der linken Seite lässt sich abschätzen durch

$$|\langle u_k, \varphi_k - \varphi \rangle| \leq \|u_k\|_{X^*} \|\varphi_k - \varphi\|_X,$$

und diese Schranke konvergiert gegen Null wegen der Beschränktheit von u_k und der starken Konvergenz der φ_k. Der zweite Term konvergiert gegen $\langle u, \varphi \rangle$ wegen der schwach*-Konvergenz von u_k. □

In Lemma 4.2 ist es essentiell, dass eine der beiden Folgen stark konvergiert. Ein analoges Resultat für das Produkt zweier schwach konvergenter Folgen gilt nicht.

Wir können nun

Satz 4.3. *Sei $f \in C(0,T;H^{-1}(\Omega))$ und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Dann existiert eine eindeutige schwache Lösung $u \in \mathcal{V}_2$ von (4.1), (4.2).*

Beweis. Wegen der gleichmässigen Beschränktheit der Folge u^N in $\mathcal{V}_2$ können wir eine schwach konvergente Teilfolge u^{N_k} mit Grenzwert u finden. Damit gilt insbesondere

$$\partial_t u^{N_k} \rightharpoonup \partial_t u \quad \text{in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

und (da A stetig ist)

$$Au^{N_k} \rightharpoonup Au \quad \text{in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Sei nun $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)$ eine beliebige Testfunktion. Dann existiert (da die ψ_j eine Basis von $H_0^1(\Omega)$ bilden) eine Folge φ_k der Form

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{N_k} \gamma_j(t) \psi_j$$

die stark gegen φ konvergiert. Aus (4.8) folgt

$$\langle \partial_t u^{N_k} + Au^{N_k} - f, \varphi_k \rangle = 0$$

und wegen Lemma (4.2) können wir zum Grenzwert übergehen, d.h.

$$\langle \partial_t u + Au - f, \varphi \rangle = 0.$$

Da φ beliebig gewählt wurde, gilt also

$$\partial_t u + Au = f \qquad \text{in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Durch ein analoges Argument können wir in (4.9) den Grenzwert durchführen und erhalten

$$u(0) = u_0 \text{in } H^{-1}(\Omega),$$

wobei zu beachten ist, dass wegen der Einbettung

$$H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow C(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

die Auswertung zur Zeit $t = 0$ auch wohldefiniert ist.

Um Eindeutigkeit zu zeigen genügt es wegen der Linearität den homogenen Fall ($f = 0$, $u_0 = 0$) zu betrachten. Durch Wahl der Testfunktion u erhalten wir dann analog zu oben eine Abschätzung der Form

$$\|u(s)\|_{L^2}^2 \leq 2C \int_0^s \|u(t)\|_{L^2}^2 \, dt$$

und mit der Gronwall-Ungleichung folgt dann $u \equiv 0$ wegen $u(0) = 0$. $\square$