Kapitel 3

Variationsmethoden für Elliptische Gleichungen

In diesem Kapitel werden wir uns mit Variationsmethoden für elliptische partielle Differentialgleichungen beschäftigen. Als typische Form und motivierendes Beispiel betrachten wir dazu

$$-\nabla \cdot (a(x, |\nabla u|^2)\nabla u) + f(x, u) = 0 \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

mit sehr allgemeinen Randbedingungen

$$u = g \qquad \text{auf } \Gamma_D \subset \partial\Omega \tag{3.2}$$

$$a(x, |\nabla u|^2)\nabla u \cdot n = h \qquad \text{auf } \Gamma_N \subset \partial\Omega \tag{3.3}$$

wobei $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ und $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ gelten soll.

Als einfachstes Beispiel ($a \equiv 1$, $f = f(x)$) haben wir bereits die Poisson-Gleichung kennengelernt. Dabei haben wir gesehen, dass eine klassische Lösung immer als Minimum des zugehörigen Energiefunktionals charakterisiert werden kann. Eine ähnliche Charakterisierung gilt für wesentlich allgemeinere elliptische Gleichungen. Wir werden sehen, dass Lösungen von (3.1) ein Energiefunktional der Form

$$E(u) = \int_\Omega [A(x, |\nabla u|^2) + F(x, u)]\; dx + \int_{\Gamma_N} hu\; d\sigma \tag{3.4}$$

mit $2\partial_v A = a$ und $\partial_u F = f$. Wie schon im Fall der Dirichlet-Energie sehen wir, dass für die Minimierung von E eigentlich keine zweifache Differenzierbarkeit nötig ist. Eigentlich muss auch keine stetige Differenzierbarkeit gefordert werden, da nur Integrale von u und ∇u ausgewertet werden müssen. Dies motiviert die Betrachtung verallgemeinerter Ableitung und eine Analyse in grösseren Funktionenräumen als jenen der stetig differenzierbaren Funktionen.

Unsere Strategie zur Analyse partieller Differentialgleichungen mit Variationsmethoden ist die Folgende:

- Wir definieren einen verallgemeinerten Ableitungsbegriff (distributionelle Ableitung).
- Wir betrachten die Minimierung von Energiefunktionalen in geeigneten Funktionenräumen mit distributionellen Ableitungen (Sobolev-Räume).
- Wir beweisen die Existenz und gegebenenfalls Eindeutigkeit mit Methoden der Funktionalanalysis und Varationsrechnung.

- Wir stellen eine Verbindung zwischen der Minimierung und einer Lösung der partiellen Differentialgleichung in geeignetem Sinn (schwache Lösung) über die Optimalitätsbedingung her.

Dazu benötigen wir zunächst einige funktionalanalytische Grundlagen, die wir zu Beginn diskutieren:

3.1 Funktionalanalytische Grundlagen

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einer kleinen funktionalanalytischen Erinnerung:

E1 Ein *normierter Raum* X ist ein Vektorraum (d.h. für $x, y \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha x + \beta y \in X$) mit einer Norm, d.h. einer Abbildung $\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$, sodass $\|x\| > 0$ für $x \neq 0$ und die Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ gilt.

E2 Ein *Banachraum* X ist ein vollständiger normierter Raum, d.h. die Häufungspunkte jeder Folge $(x_n) \subset X$ liegen wieder in X.

E3 Ein *Hilbertraum* X ist ein Banachraum, dessen Norm von einem Skalarprodukt erzeugt wird, d.h. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Das Skalarprodukt $\langle ., . \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine bilineare und symmetrische Abbildung, sodass $\langle x, x \rangle > 0$ für $x \neq 0$ gilt.

E4 Eine *Bilinearform* $B : X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine in jeder Komponente lineare Abbildung. Ein Skalarprodukt ist ein Beispiel einer Bilinearform. Die Bilinearform B ist stetig, wenn $B(x, y) \leq C\|x\|\|y\|$ für alle $x, y \in X$ gilt, mit einer fixen Konstante C.

E5 Ein *lineares Funktional* $\ell : X \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung nach $\mathbb{R}$. Das lineare Funktional heisst stetig, wenn $\ell(x) \leq C\|x\|$ für alle $x \in X$ gilt, mit einer fixen Konstante C.

E6 Der *Dualraum* X^* eines normierten Raumes X ist der Raum aller stetigen linearen Funktionale auf X. Mit

$$\|\ell\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\ell(x)| = \inf\{ \ C > 0 \mid \ell(x) \leq C\|x\|, \forall \ x \in X \ \}$$

ist X^* wieder ein normierter Raum. Falls X Banach-(Hilbert-)raum ist, dann ist auch X^* Banach-(Hilbert-)raum.

E7 In einem Hilbertraum gilt der *Riesz'sche Darstellungssatz:* Jedem linearen Funktional $\ell \in X^*$ kann ein eindeutiges Elements $x_\ell \in X$ zugeordnet werden, sodass

$$\ell(x) = \langle x_\ell, x \rangle \qquad \forall \ x \in X$$

gilt. Natürlich gilt auch die Umkehr, für jedes $y \in X$ ist $\ell_y(x) = \langle y, x \rangle$ ein lineares Funktional. Damit lässt sich (durch $\ell \leftrightarrow x_\ell$) der Raum X^* mit X identifizieren.

Die ersten unendlichdimensionalen Banach- und Hilberträume, die man üblicherweise betrachtet, sind die *Lebesgue-Räume* $L^p(\Omega)$. Für $1 \leq p < \infty$ gilt

$$L^p(\Omega) = \{ \ u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \mid u \text{ messbar }, \int_\Omega |u|^p \ dx < \infty \ \},$$

wobei hier das Lebesgue-Integral verwendet wird. Die Norm in $L^p(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \; dx \right)^{1/p}.$$

Auf einem beschränkten Gebiet gilt klarerweise $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ für $p \geq q$, auf unbeschränkten Gebieten gilt keine solche Inklusion.

Der Dualraum von $L^p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ kann mit $L^{p_*}(\Omega)$ identifiziert werden, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p_*} = 1$ gilt. Die linearen Funktionale sind dann von der Form

$$\ell(u) = \int_\Omega uv \; dx$$

für ein $v \in L^{p_*}$. Mit der Hölder-Ungleichung überzeugt man sich leicht von der Stetigkeit solcher linearer Funktionale, es gilt ja

$$|\ell(u)| = |\int_\Omega uv \; dx| \leq \left(\int_\Omega |u|^p \; dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v|^{p_*} \; dx \right)^{1/p_*} = \|u\|_p \|v\|_{p_*}.$$

Im Fall $p = 1$ erhält man aus der obigen Rechnung $p_* = \infty$. Der entsprechende Lebesgue-Raum ist

$$L^\infty(\Omega) = \{ \; u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \mid u \text{ messbar }, \operatorname*{ess\,sup}_x |u(x)| < \infty \; \},$$

wobei dass *essentielle Supremum* definiert ist als

$$\operatorname*{ess\,sup}_x |u(x)| = \inf_{N \text{ Nullmenge}} \; \sup_{x \in \Omega \setminus \mathbb{N}} |u(x)|.$$

Die Norm in $L^\infty(\Omega)$ ist definiert durch

$$\|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_x |u(x)|.$$

Die Umkehrung des Dualraums gilt aber nicht, der Dualraum von $L^\infty(\Omega)$ ist echt grösser als $L^1(\Omega)$.

3.1.1 Schwache Konvergenz

Für die Analyse im Weiteren wird die übliche Norm-Konvergenz (auch starke Konvergenz) in Banachräumen nicht ausreichen. Wir benötigen dazu die schwache oder schwach*-Konvergenz, die auf den stetigen linearen Funktionalen basiert. In Anlehnung an den Riesz'schen Darstellungssatz werden wir die Anwendung eines linearen Funktionals $y \in X^*$ auf $x \in X$ auch mit dem Dualitätsprodukt $\langle y, x \rangle$ schreiben.

Definition 3.1 (Schwache und Schwach$*$-Konvergenz).

- Sei X ein Banachraum. Die Folge $x_k \in X$ heisst schwach konvergent gegen $x \in X$ (notiert als $x_k \rightharpoonup x$), genau dann wenn

  $$\langle y, x_k \rangle \to \langle y, x \rangle, \qquad \forall y \in X^* \tag{3.5}$$

  gilt.

- Sei Z ein Banachraum und $X = Z^*$. Die Folge $x_k \in X$ heisst schwach$*$ konvergent gegen $x \in X$ (notiert als $x_k \rightharpoonup^* x$), genau dann wenn

$$\langle x_k, z\rangle \to \langle x, z\rangle, \qquad \forall z \in Z \tag{3.6}$$

gilt.

Wir sehen, dass in reflexiven Räumen ($X^{**} = X$), also insbesondere Hilberträumen, die schwache und schwach* Konvergenz übereinstimmen.

Der wesentliche Grund für die Einführung der schwachen und schwach* Topologie ist das Lemma von Riesz bzw. der daraus folgende Kompaktheitssatz von Riesz, der besagt, dass die Einheitskugel in einem Banachraum genau dann kompakt in der Normtopologie ist, wenn die Raumdimension endlich ist. Im Fall unendlichdimensionaler Räume wie die Funktionenräume die wir betrachten, kann man nicht einfach aus der Beschränktheit einer Menge auf ihre Präkompaktheit schliessen. Allerdings gilt diese Aussage immer noch bezüglich der schwach* Konvergenz, wie das folgende Resultat zeigt:

Satz 3.2 (Banach-Alaoglu). *Sei $X = Z^*$ der Dualraum eines Banachraums Z und $\mathcal{M}$ eine beschränkte Menge in X. Dann ist $\mathcal{M}$ präkompakt in der schwach* Topologie.*

Beweis. Der allgemeine Beweis folgt aus dem Satz von Tikhonov, einem relativ allgemeinen topologischen Resultat. Wir beschränken uns auf den Fall, dass Z separabel ist, was für unsere Anwendung ausreichen wird. In diesem Fall ist die schwach* Konvergenz auf beschränkten Mengen auch metrisierbar, sodass wir uns auf Folgenkonvergenz einschränken können. Sei also x_k eine beschränkte Folge in X und $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sei dicht in Z (so eine Menge existiert wegen der Separabilität). Wir wählen nun induktiv Teilfolgen

$$\mathbb{N} \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots,$$

sodass

$$\langle x_k, z_j\rangle \to a_j \qquad \text{für } k \in \Lambda_j, k \to \infty$$

gilt. Dies ist möglich, da

$$|\langle x_k, z_j\rangle| \le \|x_k\|_X \|z_j\|_Z \le c\|z_j\|_Z$$

gilt, und damit $\langle x_k, z_j\rangle$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen ist, die eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei Λ die Diagonalfolge der Λ_k, dann gilt für alle j

$$\langle x_k, z_j\rangle \to a_j \qquad \text{für } k \in \Lambda, k \to \infty.$$

Wir definieren nun ein lineares Funktional ℓ zunächst auf $\{z_j\}$ durch $\ell(z_j) := a_j$, das wir automatisch auf die lineare Hülle der z_j durch

$$\ell(\sum c_j z_j) = \sum c_j a_j$$

fortsetzen. Man sieht daraus sofort, dass für $z = \sum c_j z_j$ gilt

$$\ell(z) = \sum c_j a_j = \sum c_j \lim_{k\in\Lambda} \langle x_k, z_j\rangle = \lim_{k\in\Lambda} \langle x_k, \sum c_j z_j\rangle = \lim_{k\in\Lambda} \langle x_k, z\rangle.$$

Damit ist ℓ wegen der gleichmässigen Beschränktheit der x_k ein beschränktes lineares Funktional auf der linearen Hülle der z_j, es gilt ja

$$|\ell(z)| \le \limsup_{k\in\Lambda} |\langle x_k, z\rangle| \le \limsup_k \|x_k\|_X \|z\|_Z \le c\|z\|_Z.$$

Ein beschränktes lineares Funktional ist immer auf den Abschluss fortsetzbar, also in diesem Fall auf ganz Z. D.h. es existiert ein $x \in X$ mit $\langle x, z\rangle = \ell(x)$ für alle z aus der linearen Hülle der z_j.

Sei nun $z \in Z$ beliebig, dann gibt es eine Indexmenge $I \subset N$ mit $z_j \to z$, $j \in I$.

$$\begin{aligned}
|\langle x_k - x, z\rangle| &\leq |\langle x_k, z - z_j| + |\langle x, z - z_j| + |\langle x_k - x, z_j| \\
&\leq (\|x_k\|_X + \|x\|_X)\|z - z_j\|_Z + |\langle x_k - x, z_j| \\
&\leq (\sup_k \|x_k\|_X + \|x\|_X)\|z - z_j\|_Z + |\langle x_k - x, z_j| \\
&\leq C\|z - z_j\| + |\langle x_k - x, z_j|.
\end{aligned}$$

Für festes j erhalten wir nun im Grenzwert $k \to \infty$ (wegen $\langle x_k, z_j\rangle \to \langle x, z_j\rangle$)

$$\limsup_k |\langle x_k - x, z\rangle| \leq C\|z - z_j\|.$$

Da j beliebig ist, können wir für $j \in I$ zum Grenwert übergehen, damit gilt wegen $z_j \to z$

$$\limsup_k |\langle x_k - x, z\rangle| = 0,$$

d.h.

$$\langle x_k, z\rangle \to \langle x, z\rangle \quad \forall\ z \in Z.$$

Also konvergiert x_k schwach$*$ gegen x. □

3.1.2 Variationsmethoden in Banachräumen

Das fundamentale Resultat für die Existenz eines Minimums von J benötigt die schwach$*$-Topologie:

Satz 3.3. *Sei $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ein nach unten beschränktes Funktional, wobei $X = Z^*$ für einen Banachraum Z sei. Für J gelten die beiden folgenden Bedingungen:*

- **Koerzivität:** *Für ein $C \in \mathbb{R}$ sei die Menge*

$$\mathcal{M}_C = \{\ u \in X \mid J(u) \leq C\ \} \tag{3.7}$$

beschränkt in X.

- **Schwach$*$-Unterhalbstetigkeit:** *Für jede Folgt $u_k \rightharpoonup^* u$ in X gelte*

$$J(u) \leq \liminf_k J(u_k). \tag{3.8}$$

Dann existiert ein Minimierer $\hat{u} \in X$ von J.

Beweis. Falls $C = \inf J$ gilt, sind wir fertig, da dann $\mathcal{M}_C$ nur Minimierer enthält. Andernfalls sei u_k eine minimierende Folge, d.h.

$$J(u_k) \to \inf J > -\infty.$$

Für k hinreichend gross gilt dann $u_k \in \mathcal{M}_C$, da $\inf J < C$. Die Folge u_k liegt also in einer beschränkten und nach dem Satz von Banach-Alaoglu auch schwach$*$ präkompakten Menge. Also existiert ein $\hat{u} \in X$ und eine Teilfolge, sodass

$$u_{k_\ell} \rightharpoonup^* \hat{u}.$$

Wegen der schwach$*$ Unterhalbstetigkeit folgt

$$J(\hat{u}) \leq \liminf_\ell J(u_{k_\ell}) = \inf J,$$

und damit ist $\hat{u}$ Minimierer von J. □

Zum Nachweis der Eindeutigkeit eines Minimums ist Konvexität nötig, genauer *strikte Konvexität*

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) \qquad \forall\, \alpha \in (0,1), \forall\, u \neq v \in X. \tag{3.9}$$

Satz 3.4. *Sei $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ein nach unten beschränktes Funktional auf einem Banachraum X und J erfülle die strikte Konvexitäts-Bedingung* (3.9)*. Dann existiert höchstens ein Minimierer von J in X.*

Beweis. Angenommen $u_1 \neq u_2$ seien zwei Minimierer von J. Dann folgt aus (3.9)

$$J(u_1) + J(u_2) \leq 2J(\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2) < J(u_1) + J(u_2),$$

ein Widerspruch. □

Wir wollen die obigen Sätze später auf Funktionale wie in (3.4) anwenden. Dazu brauchen wir aber noch geeignete Funktionenräume. Die stetig differenzierbaren Funktionen kommen dafür nicht in Frage, da weder Koerzivität noch die Dualraum-Eigenschaft erfüllt ist. Um diese Probleme zu vermeiden betrachtet man sogenannte Sobolev-Räume, also Verallgemeinerungen der Lebesgue-Räume in denen auch Ableitungen vorkommen. Die Ableitungen werden dabei im distributionellen Sinn definiert.

3.1.3 Distributionelle Ableitung

Im Folgenden sei Ω wieder ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Eine Distribution ist ein stetiges lineares Funktional auf dem Raum $C_0^\infty(\Omega)$, dem Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω. Wir schreiben also

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega).$$

Natürlich kann jede Funktion in einem L^p-Raum mit einer Distribution identifiziert werden, da für $u \in L^p(\Omega)$ auch

$$\varphi \mapsto \int_\Omega u\varphi \; dx$$

ein stetiges lineares Funktional auf $C_0^\infty(\Omega)$ ist. Aber auch allgemeinere Objekte als Funktionen sind Distributionen, z.B. die Dirac δ-Distribution zentriert bei $y \in \Omega$

$$\langle \delta_y, \varphi \rangle = \varphi(y) \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

oder eine δ-Distribution einer Oberfläche $\Gamma \subset \Omega$

$$\langle \delta_y, \varphi \rangle = \int_\Gamma \varphi \, d\sigma \qquad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nun definiert man die *distributionelle Ableitung* wieder über lineare Funktionale, wobei man die Analogie zur partiellen Integration benutzt:

Definition 3.5. Sei $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Dann heisst $\partial_{x^\alpha} \eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ definiert durch

$$\langle \partial_{x^\alpha} \eta, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle \eta, \partial_{x^\alpha} \varphi \rangle \qquad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3.10}$$

die *distributionelle Ableitung* mit Ordnung $|\alpha|$ von η.

Man beachte, dass wegen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ auch $\partial_{x^\alpha} \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt und damit die rechte Seite von (3.10) wohldefiniert ist. Man beachte, dass für stetig differenzierbare Funktionen u bzw. die von u erzeugte Distribution

$$\langle \eta, \varphi \rangle := \int_\Omega u \, \varphi \, dx$$

gilt

$$\langle \partial_{x_i} \eta, \varphi \rangle = -\langle \eta, \partial_{x_i} \varphi \rangle = -\int_\Omega u \partial_{x_i} \varphi \, dx = \int_\Omega (\partial_{x_i} u) \varphi \, dx,$$

wobei wir partielle Integration und $\varphi \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ verwendet haben. Also ist die Ableitung der von u erzeugten Distribution gleich der von der Ableitung von u erzeugten Distribution, d.h. der distributionelle Ableitungsbegriff ist mit dem klassischen konsistent. Im Gegensatz zum klassischen Ableitungsbegriff sind nun aber alle Distributionen unendlich oft differenzierbar.

Distributionstheorie kann auch auf den ganzen $\mathbb{R}^n$ übertragen werden, statt den C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger muss man aber die schnell abfallenden Funktionen (jede Ableitung fällt schneller ab als $|x|^{-m}$ für alle m) betrachten.

3.2 Sobolev-Räume

Für ein Element $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$, ist die erzeugte Distribution η,

$$\langle \eta, \varphi \rangle := \int_\Omega u \, \varphi \, dx$$

auch zu einem stetigen linearen Funktional in $L^{p_*}(\Omega) = L^p(\Omega)^*$, wobei $p_* = 1 + \frac{1}{p-1}$ gilt, erweiterbar. Nun kann man testen, ob $\partial_{x_j} \eta$ zu einem stetigen linearen Funktional auf einem Lebesgue-Raum $L^{p_*}(\Omega)$ ist. Wenn ja, dann können wir das lineare Funktional als Element des Dualraums mit einem $v \in L^p(\Omega)$ identifizieren und man spricht von $v = \partial_{x_j} u$ als schwache Ableitung. Diese Überlegung ist auch die Basis für die Definition von Sobolevräumen. Man definiert mittels der distributionellen Ableitung

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ \, u \in L^p(\Omega) \mid \partial_{x_j} u \in L^p(\Omega), j = 1, \ldots, d \, \}. \tag{3.11}$$

$W^{1,p}$ ist ein normierter Raum mit Norm

$$\|u\|_{1,p} := \left(\|u\|_p^p + \sum_{j=1}^d \|\partial_{x_j} u\|_p^p \right)^{1/p}. \tag{3.12}$$

Man verwendet üblicherweise die Notation

$$|u|_{1,p} := \left(\sum_{j=1}^{d} \|\partial_{x_j} u\|_p^p \right)^{1/p} . \tag{3.13}$$

für die Halbnorm betreffend die ersten Ableitungen ($|u|_{1,p} = 0$ für u konstant). Die Konvergenz einer Folge $u_n \to u$ in der Norm von $W^{1,p}(\Omega)$ impliziert die Konvergenz $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ und $\partial_{x_j} u_n \to v_j$ in $L^p(\Omega)$. Weiters gilt für glatte Testfunktionen

$$-\int_\Omega u \partial_{x_j} \varphi \; dx = \lim \left(-\int_\Omega u_n \partial_{x_j} \varphi \; dx \right) = \lim \left(\int_\Omega \varphi \partial_{x_j} u_n \; dx \right) = \int_\Omega \varphi v_j \; dx$$

und somit folgt $v_j = \partial_{x_j} u$ im obigen Sinne. Damit gilt aber auch $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Also ist $W^{1,p}(\Omega)$ vollständig und damit ein Banachraum.

Für $p = 2$ erhält man wie im Falle der Lebesgue-Räume sogar einen Hilbert-Raum, üblicherweise mit der Bezeichnung $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$. Das Skalarprodukt in $H^1(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\langle u, v \rangle_1 := \int_\Omega \left(uv + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} u \partial_{x_j} v \right) \; dx,$$

also die Summe aus L^2-Skalarprodukten der Funktion und ihrer Ableitungen. Wie wir sehen werden, ist der Hilbert-Raum $H^1(\Omega)$ der wichtigste bei der Analysis linearer Gleichungen. Sobolevräume für $p \neq 2$ verwendet man meist bei nichtlinearen Gleichungen.

Da $L^1(\Omega)$ kein Dualraum eines Banachraumes ist, sehen wir dass der Fall $p = 1$ sehr speziell ist. Man kann zwar einen Sobolevraum $W^{1,1}(\Omega)$ definieren, von wesentlich grösserer Bedeutung (vor allem in der Bildverarbeitung) ist jedoch der Raum der Funktionen von beschränkter Variation $BV(\Omega)$

$$BV(\Omega) := \{ \; u \in L^1(\Omega) \mid \partial_{x_i} u \in C(\Omega)^* \; \}, \tag{3.14}$$

der ein bisschen grösser als $W^{1,1}(\Omega)$ ist. Man kann zeigen, dass $BV(\Omega)$ tatsächlich Dualraum eines Banachraums ist und deshalb eine schwach$*$-Topologie besitzt.

Durch analoges Vorgehen für höherere distributionelle Ableitungen kann man Sobolevräume höherer Ordnung als

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ \; u \in L^p(\Omega \mid \partial_{x^\alpha} u \in L^p(\Omega), \;\; |\alpha| \leq k \; \}$$

definieren. Wiederum erhält man damit Banachräume mit der Norm

$$\|u\|_{k,p} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_{x^\alpha} u\|_p^p \right)^{1/p}$$

und definiert die Halbnorm

$$|u|_{k,p} := \left(\sum_{|\alpha| = k} \|\partial_{x^\alpha} u\|_p^p \right)^{1/p} ,$$

die auf Polynomen vom Grad kleiner oder gleich $k-1$ verschwindet. Im Fall $p=2$ ist $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_k = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \partial_{x^\alpha} u \partial_{x^\alpha} v \; dx.$$

Der Dualraum von $H^1(\Omega)$ wird üblicherweise mit $H^{-1}(\Omega)$ bezeichnet. Per Definition gilt ja die Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Damit definiert jedes Element $\psi \in L^2(\Omega)$ ein stetiges lineares Funktional $u \mapsto \int_\Omega u\psi \; dx$ auf $H^1(\Omega)$. Also folgt $H^{-1}(\Omega) \supset L^2(\Omega) \supset H^1(\Omega)$. Umgekehrt ist $H^1(\Omega)$ aber auch Hilbertraum und somit kann der Dualraum $H^{-1}(\Omega)$ wiederum mit $H^1(\Omega)$ identifiziert werden. Für ein lineares Funktional $w \in H^{-1}(\Omega)$ bedeutet diese Identifizierung ein Element $v \in H^1(\Omega)$ zu finden, sodass

$$\langle v, \varphi\rangle = w(\varphi) \qquad \forall\ \varphi \in H^1(\Omega)$$

gilt. Schreiben wir das Skalarprodukt aus, dann erhalten wir die Variationsgleichung

$$\int_\Omega (v\varphi + \nabla v \cdot \nabla \varphi) \; dx = w(\varphi) \qquad \forall\ \varphi \in H^1(\Omega).$$

Man erkennt, dass die Bilinearform auf der linken Seite einer schwachen Formulierung des Differentialoperators $-\Delta v + v$ entspricht. D.h., durch Anwendung des Riesz'schen Darstellungssatzes in $H^1(\Omega)$ lösen wir eigentlich eine elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rechter Seite in $H^{-1}(\Omega)$. Diese Sichtweise werden wir im nächsten Kapitel auf die Analysis schwacher Lösungen allgemeinerer Gleichungen übertragen.

Neben der Differentialgleichung in Ω haben wir immer auch Randbedingungen benötigt. Da Funktionen in Sobolev-Räumen über Lebesgue-Räume definiert werden, stellt sich sofort die Frage, ob bzw. in welchem Sinn die Auswertung von Funktionen aus $W^{1,p}(\Omega)$ definiert werden kann (der Rand ist ja eine Nullmenge). Dies geschieht durch sogenannte *Spursätze*, die jeder Funktion in einem Sobolevraum einen distributionellen Randwert zuordnen, obwohl die Punktauswertung am Rand keinen Sinn ergibt. Für glatte Funktionen u, ψ und φ mit $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \psi$ auf $\partial\Omega$ gilt ja nach dem Gauss'schen Integralsatz

$$\int_{\partial\Omega} u\psi \; d\sigma = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial\varphi}{\partial n} \; d\sigma = \int_\Omega \nabla\cdot(u\nabla\varphi) \; dx = \int_\Omega (u\Delta\varphi + \nabla u\cdot\nabla\varphi) \; dx.$$

Die rechte Seite kann auch sinnvoll auf Funktionen in $W^{1,p}(\Omega)$ erweitert werden, und damit erhält man sofort auch die distributionelle Definition eines Randwerts auf $\partial\Omega$, die sogenannte Spur (die man implizit auch immer mit dem Randwert gleichsetzt). Mit erheblicher Arbeit kann man zeigen, dass die in dieser Weise definierten Randwerte auch wirklich in $L^p(\partial\Omega)$ liegen bzw. der dadurch definierte Spuroperator auf $L^p(\partial\Omega)$ fortsetzbar ist.

Satz 3.6 (Spursatz I). *Sei Ω beschränkt und $\partial\Omega$ sei C^1. Dann existiert ein beschränkter linearer Operator $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ mit*

$$Tu = u|_{\partial\Omega}, \qquad \forall\ u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}). \tag{3.15}$$

Der Einfachheit halber beweisen wir den Satz nur für die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, d.h. $\Omega = B_1(0)$. Sei zunächst $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Für $y \in \partial\Omega$ und $R \in (0,1)$ gilt dann

$$u(y) = u(Ry) + \int_R^1 \nabla u(ry)\cdot y \; dr$$

und damit auch

$$
\begin{aligned}
|u(y)|^p &= 2\int_0^1 R|u(y)|^p\ dR \\
&= 2\int_0^1 R\left|u(Ry)+\int_R^1 \nabla u(ry)\cdot y\ dr\right|^p\ dR \\
&\leq 2^p\int_0^1 R|u(Ry)|^p\ dR + 2^p\int_0^1 R\left|\int_R^1 \nabla u(ry)\cdot y\ dr\right|^p\ dR \\
&\leq 2^p\int_0^1 R|u(Ry)|^p\ dR + 2^p\int_0^1 R\int_R^1 |\nabla u(ry)|^p\ dr(1-R)^{p/p_*}\ dR \\
&\leq 2^p\int_0^1 R|u(Ry)|^p\ dR + 2^p\int_0^1\int_0^r R\ dR|\nabla u(ry)|^p\ dr \\
&\leq 2^p\int_0^1 R|u(Ry)|^p\ dR + 2^p\int_0^1 \frac{r^2}{2}|\nabla u(ry)|^p\ dr \\
&\leq 2^p\int_0^1 (|u(Ry)|^p+|\nabla u(Ry)|^p)R\ dR.
\end{aligned}
$$

Nach Integration bzgl. y über $\partial\Omega = \partial B_1(0)$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega}|u(y)|^p\ d\sigma(y) &\leq 2^p\int_{\partial\Omega}\int_0^1 (|u(Ry)|^p+|\nabla u(Ry)|^p)R\ dR\ d\sigma(y) \\
&= 2^p\int_0^1\int_{\partial B_R(0)} (|u(x)|^p+|\nabla u(x)|^p)\ d\sigma(x)\ dR \\
&= 2^p\int_\Omega (|u(x)|^p+|\nabla u(x)|^p)\ dx.
\end{aligned}
$$

Also folgt

$$
\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall\ u\in C^1(\overline{\Omega}).
$$

Damit ist der Spuroperator stetig auf einem dichten Teilraum und kann zu einem stetigen linearen Operator auf $W^{1,p}(\Omega)$ erweitert werden. □

Man kann damit zeigen, dass die Spur einer Funktion in $H^1(\Omega)$ immer einer Funktion in $L^2(\partial\Omega)$ entspricht. Es gilt sogar mehr, die Spur ist ein Element des (fraktionalen) Sobolevraums $H^{1/2}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$. Wie der Exponent 1/2 schon nahelegt, ist $H^{1/2}(D)$ immer ein Zwischenraum zwischen $L^2(D)$ und $H^1(D)$, es gilt $H^1(D) \hookrightarrow H^{1/2}(D) \hookrightarrow L^2(D)$. Im Rahmen der Interpolationstheorie von Hilbert-Räumen (cf. [4]) kann man $H^{1/2}(D)$ tatsächlich als Interpolation von $L^2(D)$ und $H^1(D)$ betrachten. Wir gehen hier nicht weiter auf dieses fortgeschrittene Thema ein, erwähnen aber die Interpolationsgleichung

$$
\|u\|_{H^{1/2}} = \sqrt{\|u\|_{L^2}\|u\|_{H^1}}.
$$

Zum Abschluss dieser Diskussion liefern wir noch eine genaue Formulierung des Spursatzes:

Satz 3.7 (Spursatz II). *Sei $\Gamma \subset \partial\Omega$ ein Teil des Randes mit positivem Maß und $\partial\Omega$ stückweise Lipschitz. Dann existiert ein stetiger linearer Operator $T : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$, sodass*

$$
Tu = u|_\Gamma \qquad \forall u\in C(\overline{\Omega})
$$

gilt. Der Operator T ist surjektiv, d.h. für jedes $v\in H^{1/2}(\Gamma)$ existiert ein $u\in H^1(\Omega)$ mit $Tu = v$.

Der Spursatz besagt, dass es eine Erweiterung der Randwerte von stetigen Funktionen auf Funktionen in $H^1(\Omega)$ gibt, und der Raum $H^{1/2}(\Gamma)$ genau aus diesen Randwerten besteht. Eine Erweiterung der Spur ist auch auf Sobolevräume $H^k(\Omega)$ möglich, es ist dann $T : H^k(\Omega) \to H^{k-1/2}(\Gamma)$ ein stetiger surjektiver Operator. Grob gesagt verliert man also beim Auswerten der Spur immer eine halbe Differentiationsordnung. Zur einfacheren Notation werden wir im Folgenden immer u für die Randwerte schreiben, damit aber eigentlich die Spur Tu assoziieren.

Neben den Randwerten von u (Dirichlet-Werte) haben wir auch die Normalableitungen $\frac{\partial u}{\partial n}$ (Neumann-Werte) in den Randbedingungen verwendet. Da nun eine Ableitung mehr auftritt, könnte man vermuten, dass $\frac{\partial u}{\partial n} \in H^{1/2-1}(\partial\Omega)$ definierbar ist. Dies ist auch tatsächlich der Fall, wenn man $H^{-1/2}(\Gamma)$ als Dualraum von $H^{1/2}(\Gamma)$ definiert (analog zur Definition von $H^{-1}(\Omega)$). Wir haben ja für glatte Funktionen nach dem Gauss'schen Integralsatz

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \; dx = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + \Delta u v) \; dx = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \; dx - \int_\Omega (-\Delta u + u) v \; dx.$$

Die rechte Seite ist zunächst ein Skalarprodukt auf $H^1(\Omega)$, also auf Funktionen dieser Klasse auch sinnvoll definiert, und im zweiten Term kann man $-\Delta u + u \in H^{-1}(\Omega)$ wieder zu einem stetigen linearen Funktional auf $H^1(\Omega)$ erweitern. In dieser Sichtweise definiert also $\frac{\partial u}{\partial n}$ ein stetiges lineares Funktional auf den Spuren von Funktionen in $H^1(\Omega)$, nach dem Spursatz also genau in $H^{-1/2}(\Omega)$. Die Neumann-Randbedingung kann also in diesem Sobolev-Raum verstanden werden, und somit sollte man für Neumann-Daten auch $g_N \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$ fordern.

Ein anderes interessantes Problem ist die Einbettung von Sobolev-Räumen in Räume stetiger Funktionen oder Hölder-Räume. Im eindimensionalen Fall haben wir ja gesehen, dass Funktionen in $H^1(\Omega)$ immer auch stetig sind, und sich die Supremumsnorm durch ein Vielfaches der H^1-Norm abschätzen lässt (siehe Übung). In so einem Fall spricht man von einer Einbettung des Raumes $H^1(\Omega)$ in $C(\Omega)$. Solche Einbettungen sind aber immer dimensionsabhängig, was an einfachen Beispiel deutlich wird. Betrachten wir z.B. Funktionen der Form $u(x) = |x|^\alpha$ auf der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ und mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt (in Polarkoordinaten)

$$\int_\Omega u(x)^2 \; dx = \int_\Omega |x|^{2\alpha} dx = S_d \int_0^1 r^{2\alpha} r^{n-1} dr,$$

wobei S_d die Oberfläche der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^d$ ist. Da man Funktionen der Form r^β genau für $\beta > -1$ integrieren kann, folgt $u \in L^2(\Omega)$ für $\alpha > -\frac{d}{2}$. Der Gradient von u ist gegeben durch $\nabla u = \alpha x |x|^{\alpha-2}$ und es gilt

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx = 2\alpha \int_\Omega |x|^{2\alpha-2} dx = \int_0^1 r^{2\alpha+n-3} dr.$$

Damit ist der Gradient integrierbar für $\alpha > 1 - \frac{n}{2}$. In Raumdimension 1 folgt damit $\alpha > \frac{1}{2}$, was mit unserem vorigen Resultat über die Stetigkeit von H^1-Funktionen auch übereinstimmt. Für höhere Raumdimensionen ist auch $\alpha < 0$ möglich, und da $u(x)$ in diesem Fall in $x = 0$ unstetig ist, gibt es auch unstetige (sogar unbeschränkte) Elemente von $H^1(\Omega)$. Um eine Einbettung in $C(\Omega)$ zu erreichen, muss man dann zu einem $W^{1,p}(\Omega)$ mit höherem p oder zu einem $H^k(\Omega)$ mit höherem k übergehen. Allgemein gilt folgendes Resultat:

Satz 3.8 (Einbettungssatz für Sobolevräume). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glattes, beschränktes Gebiet, und $kp > n$. Dann gilt die Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$. Für $(k-j)p > n$ gilt weiters die Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \subset C^j(\overline{\Omega})$.*

Der Einbettungssatz gibt nicht nur Auskunft über die Stetigkeit von Funktionen in Sobolevräumen, sondern auch über die Stetigkeit von Ableitungen. Man kann sich für eine Differentialgleichung zweiter (oder höherer) Ordnung anhand der jeweiligen Raumdimension ausrechnen, wie gross k bzw. p sein müssten, um aus einer Lösung in einem Sobolevraum durch Einbettung wieder eine stetige Lösung zu erhalten.

Aus den obigen Funktionen der Form $u(x) = |x|^\alpha$ sehen wir auch, dass Funktionen in Sobolevräume auch in Lebesgue-Räumen mit höherem Exponenten liegen. Es gilt z.B. $u \in H^1(\Omega)$ für $\alpha > 1 - \frac{d}{2}$. Umgekehrt ist $u \in L^p(\Omega)$ für $p\alpha + n > 0$. Setzen wir die untere Schranke für α ein, so folgt die Bedingung $p\alpha + n > 0$ sicher aus $p(2-n) + 2n > 0$, oder äquivalent $p < \frac{2n}{n-2}$. Man beachte, dass $\frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{2}{n-2} > 2$ gilt, in Raumdimension 1 gelangt man sogar bis zu $p = \infty$. Beim Grenzfall für $n = 2$ treten noch andere Probleme auf, man gelangt aber zu jedem $p < \infty$. Allgemein gilt folgendes Resultat:

Satz 3.9 (Einbettung von Sobolev- in Lebesgueräume). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, und $q \leq q_* = \frac{np}{n-pk}$ sowie $q < \infty$. Dann gilt die Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, diese ist sogar kompakt für $q < q_*$.*

Einbettung von Sobolev in Lebesgue-Räume lässt sich direkt (durch Einbettung der entsprechenden Ableitung) zur Einbettung von Sobolevräume $W^{k,p}(\Omega)$ in $W^{m,q}(\Omega)$ mit $m < k$ verallgemeinern. Die einfachste (und unten auch verwendete) Folgerung ist die kompakte Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$.

In manchen Fällen ist es wichtig äquivalente Normen zur obigen Sobolevraum-Norm zu verwenden, in dem man die Halbnorm mit anderen Halbnormen als der L^p-Norm der Funktion kombiniert. Solche Normen sind von der Form

$$|||u||| = \left(|u|_{k,p}^p + \sum_{j=1}^m f_i(u)^p \right)^{1/p}, \tag{3.16}$$

wobei f_i ein System von Halbnormen ist. Beispiele dafür sind

$$|||u||| = \left(|u|_{1,p}^p + |\int_\Omega u \; dx|^p \right)^{1/p},$$

oder

$$|||u||| = \left(|u|_{k,p}^p + \int_{\Gamma_d} |u(x)|^p \; dx \right)^{1/p}.$$

In diesen Fällen gilt der *Normierungssatz von Sobolev:*

Satz 3.10. *Sei $f_i : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ein System von Halbnormen, sodass*

$$0 \leq f_i(u) \leq C_i \|u\|_{k,p} \qquad \forall \; u \in W^{k,p}(\Omega)$$

gilt. Weiters soll für jedes Polynom $v \neq 0$ vom Grad kleiner oder gleich $k-1$ eine Halbnorm f_i existieren, sodass $f_i(v) \neq 0$. Dann sind die Normen $\|\|_{k,p}$ und $|||.|||$ wie in (3.16) äquivalent, d.h. es existieren Konstante $\alpha, \beta > 0$, sodass

$$\alpha |||u||| \leq \|u\|_{k,p} \leq \beta |||u||| \qquad \forall \; u \in W^{k,p}(\Omega).$$

Beweis. Es gilt nach den obigen Voraussetzungen an f_i:

$$|||u|||^p = |u|_{k,p}^p + \sum f_i(u)^p \leq \|u\|_{k,p}^p + \sum C_i^p \|u\|_{k,p}^p \leq (1 + \sum C_i^p)\|u\|_{k,p}^p$$

und mit $\alpha := (1 + \sum C_i^p)^{-1/p}$ folgt die erste Ungleichung.

Die zweite Ungleichung beweisen wir indirekt durch Widerspruch. Wir nehmen an, es existiert keine solche Konstante β. Dann existiert eine Folge $u_n \in W^{k,p}(\Omega)$ sodass

$$\|u_n\|_{k,p} > n|||u_n|||.$$

Wir definieren nun $v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_{k,p}}$. Dann gilt $\|v_n\|_{k,p} = 1$ und $|||v_n||| < \frac{1}{n}$. Insbesondere folgt $|v_n|_{k,p} < \frac{1}{n}$. Da v_n uniform beschränkt in $W^{k,p}$ ist, existiert (wegen der Kompaktheit der Einbettung) eine konvergente Teilfolge $v_{n'}$ in $W^{k-1,p}(\Omega)$, deren Grenzwert wir mit v bezeichnen. Da aber die Ableitungen der Ordnung k gegen Null konvergieren ($|v_{n'}|_{k,p} < \frac{1}{n'}$) muss für den Grenzwert auch $|v|_{k,p} = 0$ gelten, d.h. alle Ableitungen der Ordnung k verschwinden. Damit ist v ein Polynom mit Grad kleiner gleich $k-1$. Wegen $f_i(v_{n'}) < \frac{1}{n'}$ folgt $f_i(v_{n'}) \to 0$. Es gilt aber auch wegen Dreiecksungleichung und Annahmen an f_i

$$|f_i(v_{n'}) - f_i(v)| \leq f_i(v_{n'} - v) \leq C_i\|v_{n'} - v\|_{k,p} \to 0,$$

und damit muss $f_i(v) = 0$ gelten für alle i. Aus den Annahmen über die f_i folgt dann aber sofort $v = 0$. Dies ist aber ein Widerspruch wegen

$$0 = \|v\|_{k,p} = \lim \|v_{n'}\|_{k,p} = 1. \quad \square$$

Konsequenzen aus dem Normierungssatz von Sobolev sind unter anderem die Poincare-Ungleichung und die Friedrichs-Ungleichung. Die Poincare-Ungleichung ergibt sich für $k = 1$ mit der Seminorm $f_1(u) = |\int_\Omega u\ dx|$, d.h. es gilt

$$\|u\|_{1,p} \leq C \left(|\int_\Omega u\ dx|^p + |u|_{1,p}^p \right)^{1/p}.$$

Insbesondere folgt für Funktionen mit Mittelwert Null die Abschätzung

$$\|u\|_{1,p} \leq C|u|_{1,p}.$$

Friedrichs-Ungleichungen erhält man für $k = 1$ mit der Wahl $f_1(u)^p = \int_\Gamma |u|^p\ d\sigma$, und es folgt

$$\|u\|_{1,p} \leq C \left(\int_\Gamma |u|^p\ d\sigma + |u|_{1,p}^p \right)^{1/p}.$$

Für Funktionen mit homogenen Dirichlet-Randwerten auf Γ_D lässt sich wiederum die H^1-Norm durch die Halbnorm abschätzen. Diese Funktionen fasst man meist in einem eigenen Unterraum zusammen, mit der Notation

$$H_0^1(\Omega) := \{\ u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \Gamma_D\ \},$$

und verwendet darin wiederum das Skalarprodukt von $H^1(\Omega)$. Da die Spur stetig ist, kann eine Folge in $H_0^1(\Omega)$ nur Häufungspunkte mit verschwindender Spur auf Γ_D haben. Folglich ist $H_0^1(\Omega)$ abgeschlossen, also selbst ein Hilbertraum.

3.3 Variationsrechnung und Schwache Lösungen

Im Folgenden betrachten wir nun die Minimierung von Funktionalen der Form

$$E(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)\ dx. \tag{3.17}$$

Wir nehmen an, dass die messbare Funktion $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Bedingung der Form

$$C_1|w|^p + C_2|s|^p + C_3 \geq F(x, s, w) \geq c_1|w|^p + c_2|s|^p + c_3 \tag{3.18}$$

erfüllt, mit Konstanten $C_1, C_2, C_3, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ und $c_3 \in \mathbb{R}$. Weiters nehmen wir an, dass gilt:

$$w \mapsto F(x, s, w) \quad \text{ist konvex für alle } x \in \Omega, s \in \mathbb{R} \tag{3.19}$$

und

$$|F(x, s_1, w) - F(x, s_2, w)| \leq G(x, s_1, s_2, w)|s_1 - s_2| \quad \forall\ x \in \Omega, w \in \mathbb{R}^n, s_1 \in \mathbb{R}, s_2 \in \mathbb{R} \tag{3.20}$$

für eine positive Funktion g mit

$$G(x, s_1, s_2, w) \leq \gamma_1|w|^{p-1} + \gamma_2(|s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}). \tag{3.21}$$

Wir sehen dann, dass

$$E(u) \geq \int_\Omega (c_1|\nabla u|^p + c_2|u|^p + c_3)\ dx \geq \min\{c_1, c_2\}\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - |c_3|\ |\Omega| \tag{3.22}$$

gilt. Wir erhalten also, dass für C hinreichend gross, das sub-Level Set $\mathcal{M}_C$ nicht leer und beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$ ist. Also ist $W^{1,p}(\Omega)$ der richtige Raum für die Analyse von (3.17), mit (3.18) sind dann die ersten beiden Bedingungen von Satz 3.3 erfüllt und es bleibt uns nur mehr die schwach-* Unterhalbstetigkeit nachzuprüfen.

Dazu benötigen wir noch ein kleines Hilfsresultat über konvexe Funktionale:

Lemma 3.11. *Sei $J : X \to \mathbb{R}$ ein konvexes Funktional auf einem reflexiven Banachraum X. Dann ist J schwach unterhalbstetig.*

Beweis. Wir nehmen zum Widerspruchsbeweis an, dass J in u nicht unterhalbstetig ist, d.h. es existiert eine Folge $u_k \rightharpoonup^* u$ mit $J(u) > \lim_k J(u_k)$. Aus der Konvexität von J folgt die Konvexität des Epigraphen von J, d.h. die Menge

$$epi(J) = \{\ (u, a) \in X \times \mathbb{R} \mid a \geq J(u)\ \}$$

ist konvex. Mit $J(u) > \lim_k J(u_k)$ existiert dann ein $b \in \mathbb{R}$ mit $J(u) > b > \lim J(u_k)$, also ist $(u, b) \notin epi(J)$. Nach dem Satz von Hahn-Banach kann man dann (u, b) und die konvexe Menge $epi(f)$ durch eine Gerade trennen, d.h. es existiert $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ und $p \in X^*$ mit

$$cb + \langle p, u\rangle + d \leq 0$$

und

$$ca + \langle p, v\rangle + d \geq 0$$

für alle $(v,a) \in epi(J)$. Wählen wir speziell $a = J(u)$ so folgt

$$cb \leq cJ(u)$$

und deshalb muss $c > 0$ gelten. Also können wir durch c dividieren und erhalten für $a = J(u_k)$, $v = u_k$:

$$b + \frac{1}{c}\langle p, u\rangle \leq J(u_k) + \frac{1}{c}\langle p, u_k\rangle$$

Damit folgt wegen der schwachen Konvergenz $\langle p, u\rangle = \lim\langle p, u_k\rangle$ und damit $b \leq \lim J(u_k)$, also ein Widerspruch. □

Lemma 3.12. *Sei E definiert durch* (3.17) *und F erfülle* (3.18), (3.19), (3.21) *für ein $p \in (1,\infty)$.Dann ist E schwach-unterhalbstetig in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Beweis. Es gelte $u_k \rightharpoonup *u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Wegen der kompakten Einbettung von $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ konvergiert damit $u_k \to u$ stark in $L^p(\Omega)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass u_k eine beschränkte Folge ist, da für Teilfolgen mit $\|u_{k_\ell}\|_{W^{1,p}} \to \infty$ auch $E(u_{k_\ell}) \to \infty$ folgt (wegen (3.18)). Damit ist entweder der limes inferior gleich unendlich, was die Unterhalbstetigkeit trivial macht, oder wir können diese Teilfolgen eliminieren, da der limes inferior auch ohne diese Teilfolge noch derselbe ist.

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}
\liminf_k E(u_k) &= \liminf_k \int_\Omega F(x, u_k, \nabla u_k)\ dx \\
&\geq \liminf_k \int_\Omega F(x, u, \nabla u_k)\ dx + \\
&\quad \liminf_k \left[\int_\Omega F(x, u_k, \nabla u_k)\ dx - \int_\Omega F(x, u, \nabla u_k)\ dx\right].
\end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst den zweiten Term und werden sehen, dass dieser gegen Null konvergiert. Es gilt wegen (3.20) und (3.21)

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega F(x, u_k, \nabla u_k)\ dx - \int_\Omega F(x, u, \nabla u_k)\ dx\right| \\
&\quad \leq \int_\Omega |F(x, u_k, \nabla u_k) - F(x, u, \nabla u_k)|\ dx \\
&\quad \leq \int_\Omega G(x, u_k, u, \nabla u_k)|u - u_k|\ dx \\
&\quad \leq \int_\Omega (\gamma_1|\nabla u_k|^{p-1} + \gamma_2|u_k|^{p-1} + \gamma_2|u|^{p-1})|u - u_k|\ dx.
\end{aligned}$$

Sei $p_* = \frac{p}{p-1}$, dann folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega F(x, u_k, \nabla u_k)\ dx - \int_\Omega F(x, u, \nabla u_k)\ dx\right| \\
&\leq \left[\gamma_1\left(\int_\Omega |\nabla u_k|^p\ dx\right)^{1/p_*} + \gamma_2\left(\int_\Omega |u_k|^p\ dx\right)^{1/p_*} + \gamma_2\left(\int_\Omega |u|^p\ dx\right)^{1/p_*}\right]\left(\int_\Omega |u - u_k|^p\ dx\right)^{1/p} \\
&= \left[\gamma_1\|\nabla u_k\|_{L^p}^{1/p_*} + \gamma_2\|u_k\|_{L^p}^{1/p_*} + \gamma_2\|u\|_{L^p}^{1/p_*}\right]\|u - u_k\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Der erste Term ist beschränkt und wegen der starken Konvergenz in $L^p(\Omega)$ konvergiert $\|u - u_k\|_{L^p} = 0$. Also ist

$$\liminf_k \left[\int_\Omega F(x, u_k, \nabla u_k)\ dx - \int_\Omega F(x, u, \nabla u_k)\ dx \right] = 0.$$

Aus (3.19) sehen wir sofort, dass das Funktional

$$J(v) := \int_\Omega F(x, u, \nabla v)\ dx$$

konvex ist, und wegen (3.18) ist es auch endlich. Damit können wir Lemma 3.11 anwenden und erhalten die Unterhalbstetigkeit von J, insbesondere

$$E(u) = J(u) \leq \liminf_k J(u_k) = \liminf_k \int_\Omega F(x, u, \nabla u_k)\ dx.$$

Damit folgt die Unterhalbstetigkeit von E. $\square$

Nun haben wir alle Voraussetzungen des Existenzresultats in Satz (3.3) nachgeprüft und erhalten:

Satz 3.13. *Sei E definiert durch* (3.17) *und F erfülle* (3.18), (3.19), (3.21) *für ein $p \in (1, \infty)$. Dann existiert ein Minimierer von E in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Ist die Abbildung $(s, w) \mapsto F(x, s, w)$ strikt konvex für fast alle $x \in \Omega$, dann ist auch E strikt konvex als Funktional in $W^{1,p}(\Omega)$ und wir erhalten unter dieser Bedingung die Eindeutigkeit des Minimierers.

Um nun die Verbindung mit elliptischen partiellen Differentialgleichungen herzustellen betrachten wir den Fall einer differenzierbaren Funktion F, genauer nehmen wir an, dass gilt

$$F(x, \cdot, \cdot) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \qquad \text{für fast alle } x \in \Omega, \tag{3.23}$$

sowie für alle partiellen Ableitungen nach s oder w_i

$$|\partial_\eta F(x, \cdot, \cdot)| \leq D_1 |w|^{p-1} + D_2 |s|^{p-1} + D_3 \qquad \text{für } \eta = s, \eta = w_i, \tag{3.24}$$

für positive Konstante D_1, D_2, D_3. In diesem Fall können wir Richtungsableitungen berechnen, die für ein Minimum offensichtlich verschwinden sollten und erhalten daraus eine Gleichung. Die genaue Argumentation ist die folgende: sei $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ beliebig aber fix. Dann gilt für einen Minimierer u von E:

$$E(u) \leq E(u + t\varphi) \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.25}$$

Damit hat die eindimensionale Funktion $e_\varphi(t) := E(u + t\varphi)$ ein Minimum in $t = 0$, und unter den obigen Bedingungen an F ist e_φ auch wirklich differenzierbar. Damit folgt

$$0 = \frac{de_\varphi}{dt}(0) = \int_\Omega (\partial_s F(x, u, \nabla u)\varphi + \nabla_w F(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\varphi)\ dx.$$

Es gilt also die Variationsgleichung

$$\int_\Omega (\partial_s F(x, u, \nabla u)\varphi + \nabla_w F(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\varphi)\ dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in W^{1,p}(\Omega). \tag{3.26}$$

Mit entsprechender zusätzlicher Regularität von F und von u (z.B. $u \in W^{2,p}(\Omega)$) können wir den Gauss'schen Satz anwenden und erhalten daraus

$$\int_\Omega (\partial_s F(x,u,\nabla u) - \nabla \cdot (\nabla_w F(x,u,\nabla u)))\varphi \; dx + \int_{\partial\Omega} \nabla_w F(x,u,\nabla u) \cdot n\varphi \; d\sigma = 0.$$

Dies ist für beliebige Testfunktionen $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ nur möglich, wenn u eine (starke) Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$-\nabla \cdot (\nabla_w F(x,u,\nabla u)) + \partial_s F(x,u,\nabla u) = 0 \qquad \text{fast überall in } \Omega \tag{3.27}$$

erfüllt und dazu auch noch die Neumann-Randbedingung

$$\nabla_w F(x,u,\nabla u) \cdot n = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \tag{3.28}$$

Wir können nun umgekehrt vorgehen um eine sogenannte *schwache Lösung* zu definieren:

Definition 3.14. Eine Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$ heisst *schwache Lösung* der partiellen Differentialgleichung

$$-\nabla \cdot (A(x,u,\nabla u)) + B(x,u,\nabla u) = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{3.29}$$

mit homogener Randbedingung (auch natürlicher Randbedingung)

$$A(x,u,\nabla u) \cdot n = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega, \tag{3.30}$$

genau dann wenn

$$\int_\Omega (A(x,u,\nabla u) \cdot \nabla\varphi + B(x,u,\nabla u)\varphi) \; dx = 0 \qquad \forall \varphi \in W^{1,p}(\Omega) \tag{3.31}$$

gilt.

Beispiel 3.15. Als einfaches Beispiel betrachten wir eine p-Laplace Gleichung mit zusätzlichem Term nullter Ordnung, modelliert über das Energiefunktional $(1 < p < \infty)$

$$E(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) \; dx - \int_\Omega fu \; dx \tag{3.32}$$

mit $f \in L^\infty(\Omega)$. Man sieht dass für diese spezielle Wahl (3.18) gilt (wobei wir den linearen Term mit einer Hölder Ungleichung nach unten abschätzen). Weiter sind auch (3.19), (3.20) und (3.21) erfüllt. Damit erhalten wir sofort die Existenz eines Minimums in $W^{1,p}(\Omega)$. Auch strikte Konvexität von E und damit Eindeutigkeit eines Minimums ist gegeben. Wir können E auch richtungsweise differenzieren und erhalten die Variationslgeichung

$$\int_\Omega (|u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi + |u|^{p-2}u\varphi) \; dx = \int_\Omega fu \; dx.$$

Durch partielle Integration sehen wir, dass dies die schwache Formulierung der partiellen Differentialgleichung

$$-\nabla \cdot (|u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u = f \tag{3.33}$$

ist. Aus der obigen Theorie erhalten wir also die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung für diese Gleichung mit dem p-Laplace Operator. Für $p = 2$, also ein quadratisches Funktional erhalten wir den Spezialfall einer linearen partiellen Differentialgleichung

$$-\Delta u + u = f \tag{3.34}$$

Beispiel 3.16. Als kanonisches Beispiel für lineare partielle Differentialgleichung betrachten wir das Energiefunktional

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (a(x)|\nabla u|^2 + c(x)|u|^2) \; dx - \int_\Omega f u \; dx \tag{3.35}$$

mit $a \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$, also

$$F(x, s, w) = \frac{1}{2}(a(x)|w|^2 + c(x)s^2 - f(x)s).$$

Da wir a und c als beschränkt angenommen haben, können wir die ersten Terme leicht nach oben abschätzen. Um eine vernünftige Abschätzung nach unten zu erhalten müssen wir Schranken an a und c voraussetzen, nämlich

$$a(x) \geq \alpha, \qquad c(x) \geq \gamma > 0 \qquad \text{für fast alle } x \in \Omega \tag{3.36}$$

mit positiven Konstanten α und γ. Die Positivität von a und c ist auch für die Konvexität von E nötig. Wir sehen, dass wir unter der sinnvollen Annahme $f \in L^2(\Omega)$ die Abschätzung (3.18) nicht punktweise erfüllen können. Andererseits gilt mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$C_1|w|^p + C_2|s|^p + C_3(x) \geq F(x, s, w) \geq c_1|w|^p + c_2|s|^p + c_3(x),$$

mit Funktionen $C_3 \in L^1(\Omega)$ und $c_3 \in L^1(\Omega)$ - (Vielfache von f^2). Der Existenzbeweis kann dann völlig analog durchgeführt werden, denn man braucht in allen Aussagen immer nur die Beschränktheit von Integralen von C_3 und c_3.

Damit erhalten wir aus der obigen Theorie die Existenz und Eindeutigkeit eines Minimums in $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Die entsprechende Variationslgeichung ist

$$\int_\Omega (a\nabla u \cdot \nabla \varphi + cu\varphi) \; dx = \int_\Omega f u \; dx.$$

Durch partielle Integration sehen wir, dass dies die schwache Formulierung der partiellen Differentialgleichung

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) + cu = f \tag{3.37}$$

ist.

3.4 Dirichlet-Probleme

Ein relativ häufig auftretender Fall ist, dass F in (3.17) nicht von u abhängt. Damit ist in (3.18) automatisch $c_2 = 0$ und man erhält zunächst keine Abschätzung durch die Norm in $W^{1,p}(\Omega)$, sondern nur in der Halbnorm. Dies ist etwa der Fall bei Energie der Poisson-Gleichung, oder allgemeiner der p-Laplace Gleichung

$$E(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \; dx. \tag{3.38}$$

In diesem Fall ist aber auch tatsächlich das Neumann-Problem nicht eindeutig lösbar, da wir jede Konstante zu einer Lösung addieren können und wieder eine erhalten. Wir werden dieses

Problem im Fall einer linearen Gleichung (3.37) näher diskutieren. Wir betrachten dazu also noch mal die Energie

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (a(x)|\nabla u|^2 + c(x)|u|^2)\ dx - \langle f, u\rangle - \int_{\partial\Gamma_N} h\ (Tu)\ d\sigma. \tag{3.39}$$

Wir sehen, dass wir statt $f \in L^2(\Omega)$ nur fordern müssen, dass f ein stetiges lineares Funktional auf $H^1(\Omega)$ ist, d.h. $f \in H^{-1}(\Omega)$. Auch für das Randintegral können wir ähnlich argumentieren. Wegen des Spursatzes gilt $Tu \in L^2(\Gamma_N)$ für $u \in H^1(\Omega)$, und damit ist das Randintegral über Γ_N wohldefiniert für $h \in L^2(\Gamma_N)$ (streng genommen ist sogar $Tu \in H^{1/2}(\Gamma_N)$ und es genügt $h \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$, dem Dualraum von $H^{1/2}(\Gamma_N)$). Wie oben nehmen wir an, dass $a \in L^\infty(\Omega)$ und $c \in L^\infty(\Omega)$ gilt, eine gleichmässige untere Schranke fordern wir aber nur für a, d.h.

$$a(x) \geq \alpha > 0, \qquad c(x) \geq 0 \qquad \text{für fast alle } x \in \Omega. \tag{3.40}$$

Wir suchen nun eine Lösung mit gegebenem Dirichletwert g auf $\Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_N$, d.h. ein Minimum von E über jenen H^1-Funktionen mit Spur g auf Γ_D. Um die Existenz und Eindeutigkeit eines Minimums zu garantieren, ist es wieder wichtig, Beschränktheit der Sub-Level Sets und und strikte Konvexität nachzuweisen, was wir durch eine Abschätzung der Energie nach unten erhalten. Die Unterhalbstetigkeit folgt analog wie oben.

Zuerst betrachten wir aber noch eine kleine Verschiebung um nur homogene Dirichlet-Randwerte betrachten zu müssen. Für $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ existiert nach dem (zweiten) Spursatz eine Funktion $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ mit $T\tilde{g} = g$. Also definieren wir $\tilde{u} := u - \tilde{g}$ als neue Unbekannte und suchen diese Funktion folglich im Raum

$$H_0^1(\Omega) = \{\ u \in H^1(\Omega) \mid Tu = 0\ \}, \tag{3.41}$$

wobei Tu die Spur auf Γ_D bezeichnet. Entwickeln wir die Quadrate und vernachlässigen von $\tilde{u}$ unabhängige Terme, dann können wir die schwache Lösung auch als Minimierer des Funktionals

$$\tilde{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (a(x)|\nabla u|^2 + c(x)|u|^2)\ dx - \int_\Omega a\nabla u\cdot\nabla\tilde{g}\ dx - \int_\Omega cu\tilde{g}\ dx - \langle f, u\rangle - \int_{\partial\Gamma_N} h\ (Tu)\ d\sigma \tag{3.42}$$

in $H_0^1(\Omega)$ suchen. Wir sehen, dass wir alle linearen Terme zu einem stetigen linearen Funktional auf $H_0^1(\Omega)$

$$\langle\tilde{f}, u\rangle := \int_\Omega a\nabla u\cdot\nabla\tilde{g}\ dx + \int_\Omega cu\tilde{g}\ dx + \langle f, u\rangle + \int_{\partial\Gamma_N} h\ (Tu)\ d\sigma$$

sammeln können, also schreiben wir das Energiefunktional als

$$\tilde{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (a(x)|\nabla u|^2 + c(x)|u|^2)\ dx - \langle\tilde{f}, u\rangle. \tag{3.43}$$

Lemma 3.17. *Die Funktionen $a \in L^\infty(\Omega)$ und $c \in L^\infty(\Omega)$ erfüllen* (3.40)*. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ die Ungleichung*

$$C\|v\|_{H^1}^2 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega (a(x)|\nabla u|^2 + c(x)|u|^2)\ dx \tag{3.44}$$

gilt.

Beweis. Es gilt offensichtlich

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (a(x)|\nabla u|^2 + c(x)|u|^2)\ dx \geq \frac{\alpha}{2}|u|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Die Aussage folgt dann direkt aus der Friedrichs-Ungleichung (Sobolev'scher Normierungssatz mit $f(u) = \|Tu\|$). □

Wegen

$$\langle \tilde{f}, u\rangle \geq -\|\tilde{f}\|_{H^{-1}}\|u\|_{H^1} \geq -\frac{1}{2C}\|\tilde{f}\|^2_{H^{-1}} - \frac{C}{2}\|u\|^2_{H^1}$$

erhalten wir die Beschränktheit der Sub-Level Sets in $H^1(\Omega)$. Analog können wir strikte Konvexität nachweisen und erhalten damit folgendes Resultat:

Satz 3.18. *Die Funktionen $a \in L^\infty(\Omega)$ und $c \in L^\infty(\Omega)$ erfüllen (3.40). Weiter sei $\tilde{f} \in H^{-1}(\Omega)$. Dann existiert ein eindeutiger Minimierer $u \in H^1_0(\Omega)$ des Energiefunktionals $\tilde{E}$, der als eindeutige Lösung der Variationsgleichung*

$$\int_\Omega (a\nabla u \cdot \nabla\varphi + cu\varphi)\ dx = \langle \tilde{f}, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega), \tag{3.45}$$

charakterisiert ist.

Die Variationsgleichung (3.45) ist die schwache Formulierung der Differentialgleichung

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) + cu = \tilde{f},$$

und liefert auch gleichzeitig eine Möglichkeit diese Differentialgleichung sinnvoll zu interpretieren. Wir können mit der obigen schwachen Form einen Differentialoperator

$$A : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega), u \mapsto -\nabla \cdot (a\nabla u) + cu \tag{3.46}$$

definieren. Da nach Satz 3.18 die Lösung der Gleichung $Au = \tilde{f}$ für alle $\tilde{f} \in H^{-1}(\Omega)$ existiert, ist A bijektiv und besitzt eine Inverse. Diese ist auch stetig, wie wir mit Wahl der Testfunktion $\varphi = u$ und (3.17) sofort sehen:

$$\begin{aligned} 2C\|u\|^2_{H^1} &\leq \int_\Omega (a|\nabla u|^2 + c|u|^2)\ dx \\ &= \langle \tilde{f}, u\rangle \\ &\leq \|\tilde{f}\|_{H^{-1}}\|u\|_{H^1}, \end{aligned}$$

also

$$\|u\|_{H^1} \leq \frac{1}{2C}\|\tilde{f}\|_{H^{-1}}.$$

Ein alternativer Beweis wäre übrigens durch den Vergleich $E_0(u) \leq E_0(0) = 0$ möglich.

Die Norm des beschränkten linearen Operators A^{-1} ist invers proportional zu C und damit auch zur unteren Schranke für a. Da wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass das Maximum von a gleich eins ist, ist somit der Quotient aus Supremum und Infimum ausschlaggebend für die Norm der Inversen. Dies ist analog zur Konditionszahl einer Matrix und der Norm ihrer Inversen. Im Gegensatz zu Matrizen ist es nicht direkt möglich die Eigenwerte (das Spektrum) des Operators A anzugeben, da ja Urbild- und Bildraum nicht übereinstimmen. Um dennoch eine Eigenwerttheorie durchführen zu können, kann man Einbettungen benutzen, etwa

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

Durch Einschränkung bzw. Vergrösserung der Räume definieren wir dann

$$K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), K = I_{H^1 \to L^2} A^{-1} I_{L^2 \to H^{-1}}.$$

Wegen der kompakten Einbettungen ist K ein kompakter Operator auf $L^2(\Omega)$ und wegen der Eigenschaften von A ist K auch selbstadjungiert, d.h. es gilt

$$\int_\Omega (Ku)v \; dx = \int_\Omega u(Kv) \; dx$$

und sogar positiv definit, d.h.

$$\int_\Omega (Ku)u \; dx > 0.$$

Nach der Eigenwerttheorie positiv-definiter kompakter Operatoren (cf. [2]) existiert dann ein Orthonormalsystem $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und eine monotone Folge von positiven Eigenwerten

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq ...$$

mit einzigem Häufungspunkt Null, wobei

$$Ku_k = \lambda_k u_k$$

gilt. Man beachte, dass wegen der Regularität von K sogar $u_k \in H^1(\Omega)$ gilt, und damit

$$\frac{1}{\lambda_k} u_k = A I_{H^1 \to H^{-1}} u_k.$$

Wir können also die u_k als Eigenvektoren von A interpretieren mit Eigenwerten $\frac{1}{\lambda}_k$, die gegen unendlich konvergieren. Diese Darstellung ist auch eine Möglichkeit zur Berechnung, man erhält u_k als Lösung der Differentialgleichung

$$-\nabla \cdot (a \nabla u_k) + (c - \frac{1}{\lambda_k}) u_k = 0 \tag{3.47}$$

mit homogenen Randwerten. Man beachte, dass für positives λ_k der Koeffizient von u_k negativ werden kann. Damit sind die Voraussetzungen des Eindeutigkeitsresultats (nichtkonvexe Energie) verletzt und es kann neben der Nulllösung auch eine nichttriviale Lösung existieren.

3.5 Nichtvariationelle Probleme und Störungstheorie

In einigen Fällen elliptischer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung findet man Terme die (zumindest im obigen Sinne) keine Variationsformulierung zulassen. Dies gilt für

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) + b \cdot \nabla u + (c + d)u = f \tag{3.48}$$

wenn b von Null verschieden ist. Eine schwache Formulierung dieses Problems erhalten wir durch Multiplikation mit u und partieller Integration als

$$\int_\Omega (a\nabla u \cdot \nabla\varphi + b \cdot \nabla u\varphi + (c+d)u\varphi)\; dx = \langle f, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.49}$$

Der Term mit b ist dabei nichtsymmetrisch in u und φ, kann deshalb auch nicht aus der ersten Variation eines Energiefunktionals entstehen.

Wir machen für a und c die selben Positivitätsannahmen wie oben, erlauben aber ein negatives d, deshalb dieser zusätzliche Term. Wir nehmen an, dass alle Koeffizienten beschränkt sind. In diesem Fall ist es sinnvoll, die Sichtweise einer Operatorgleichung zu übernehmen und ein Störungsargument für die zusätzlichen Terme durchzuführen. Wir definieren den Operator $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ wie oben und zusätzlich den Operator $B : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ mit $B = I_{L^2\to H^{-1}}\tilde{B}$ und

$$\tilde{B} : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega), u \mapsto b \cdot \nabla u + du.$$

Man sieht leicht, dass $\tilde{B}$ ein stetiger linearer Operator ist, und wegen der zusätzlichen kompakten Einbettung ist B ein kompakter Operator. Die Differentialgleichung kann dann als

$$Au + Bu = f \tag{3.50}$$

geschrieben werden, und da wir schon wissen, dass A stetig invertierbar ist, als

$$u + A^{-1}Bu = A^{-1}f. \tag{3.51}$$

Wir haben also ein System der Form

$$(I + K)u = g \tag{3.52}$$

zu lösen, mit $g \in H_0^1(\Omega)$ und $K : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$. Die Kompaktheit von B impliziert die Kompaktheit von K, damit haben wir eine sehr spezielle Form einer Operatorgleichung, nämlich mit einer kompakten Störung der Identität. Da bei einem kompakten Operator die Eigenwerte gegen Null konvergieren, wird bis auf einen kleinen Teilraum die Identität dominieren (diese hat ja Eigenwert eins für jeden Eigenvektor). Auf dem verbleibenden kleinen Teilraum erwartet man dann ähnliche Eigenschaften wie bei Matrizengleichungen wegen der endlichen Dimension. Für Operatoren der Form $I + K$ mit K kompakt gelten die Riesz'schen Sätze (cf. [2]), die unter anderem aussagen, dass der Nullraum von $I + K$ endlichdimensional und das Bild abgeschlossen ist. Wichtig für uns ist eine Folgerung aus dem dritten Riesz'schen Satz (siehe [2] für Beweis in allgemeinerer Form):

Satz 3.19. *Sei K ein kompakter Operator auf einem Hilbertraum. Ist $I + K$ injektiv, dann ist $I + K$ auch injektiv.*

Dies bedeutet, dass es genügt die Eindeutigkeit des homogenen Problems $(I + K)u = 0$ zu überprüfen, um die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für beliebige rechte Seite zu erhalten. Das homogene Problem entspricht der Variationsgleichung

$$\int_\Omega (a\nabla u \cdot \nabla\varphi + b \cdot \nabla u\varphi + (c+d)u\varphi)\; dx = 0 \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.53}$$

Eine beliebte Möglichkeit um Eindeutigkeit zu zeigen ist die Wahl der Testfunktion $\varphi = u$. Dann folgt

$$\int_\Omega \left(a|\nabla u|^2 + \frac{b}{2} \cdot \nabla(u^2) + (c+d)u^2\right)\, dx = 0$$

bzw. nach partieller Integration des zweiten Terms

$$\int_\Omega \left(a|\nabla u|^2 + (c + d - \frac{1}{2}\nabla \cdot b)u^2\right)\, dx = 0.$$

Ist nun

$$c + d - \frac{1}{2}\nabla \cdot b \geq 0,$$

so folgt die Eindeutigkeit des homogenen Problems und damit auch Existenz und Eindeutigkeit für (3.48) mit beliebigem $f \in H^{-1}(\Omega)$.