Kapitel 2

Einige wichtige Partielle Differentialgleichungen

Im folgenden werden wir als Einführung vier wichtige Beispiele partieller Differentialgleichungen untersuchen und dabei auch die wesentlichsten Konzepte (die im weiteren Verlauf der Vorlesung noch detaillierter besprochen werden) kennen lernen.

2.1 Lineare Transportgleichung

Wir beginnen mit der *Transportgleichung*, die den kanonischen Fall einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung darstellt. Die Bezeichnung Transportgleichung ist in der Literatur nicht komplett eindeutig: Für ein gegebenes Vektorfeld $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ wird sowohl

$$\partial_t u + b \cdot \nabla u = 0 \qquad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{2.1}$$

als auch

$$\partial_t u + \nabla \cdot (bu) = 0 \qquad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{2.2}$$

als Transportgleichung auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Diese beiden Gleichung stimmen für $\nabla \cdot b = 0$ überein, insbesondere für (bezüglich x) konstante Vektorfelder b. Wir werden hier beide Fälle betrachten, die sich aber mit ähnlichen Methoden behandeln lassen.

Wie man sofort sieht, kann die Lösung aus der Gleichung alleine nicht eindeutig bestimmt sein. So gilt etwa, dass Addition einer Konstante zu u immer eine neue Lösung von (2.1) bestimmt. Deshalb benötigt man zusätzliche Bedingungen am Rand des Gebiets, in diesem Fall des Raum-Zeit Zylinders $\Omega \times \mathbb{R}^+$. Zur Vereinfachung werden wir hier nur den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ betrachten, und somit nur Anfangsbedingungen bei $t = 0$ stellen, d.h. wir forder, dass

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

gelten soll.

2.1.1 Charakteristikenmethode

Die Charakteristikenmethode für partielle Differentialgleichungen basiert darauf, die Gleichung entlang geeigneter Kurven zu betrachten, entlang denen die Gleichung einfacher ist. Wir starten mit (2.1), die wir alternativ auch als

$$c \cdot Du = 0, \qquad c = (b, 1) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n+1} \tag{2.4}$$

schreiben können. D.h. wir suchen eine Funktion im $(n+1)$-dimensionalen Raum, deren Gradient normal auf das Vektorfeld c steht. Betrachten wir also eine Kurve mit Tangentialvektor c, so muss u entlang dieser Kurve konstant sein. Mit dieser Idee konstruieren wir die charakteristische Kurve (oder auch Charakteristik)

$$\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \quad \gamma(s) = (\xi(s), \tau(s)), \tag{2.5}$$

entlang der u konstant, also $Du = 0$ sein soll. Mit Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{ds} u(\gamma(s)) &= \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} u(\gamma(s)) \xi_i'(s) + \partial_t u(\gamma(s)) \tau'(s) \\ &= (\xi'(s), \tau'(s)) \cdot Du(\gamma(s)) = c(\gamma(s)) \cdot Du(\gamma(s)). \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt muss c tangential zur Kurve sein, dies ist am einfachsten durch die Gleichung

$$(\xi'(s), \tau'(s)) = c(\gamma(s)) = (b(\xi(s), \tau(s)), 1) \tag{2.6}$$

zu erfüllen, die auch als charakteristische Gleichung bezeichnet wird. Wegen der speziellen Gestalt des Vektorfelds c kann ein Teil der charakteristischen Gleichung direkt gelöst werden, nämlich $\tau'(s) = 1$. Es folgt somit $\tau(s) = s + \alpha$ mit einer noch zu bestimmenden Konstante α, die aber nur von der Parametrisierung der Kurve abhängt. Beachten wir, dass unsere Anfangsmannigfaltigkeit bei $t = 0$ liegt, so ist es naheliegend die Kurven auch dort beginnen zu lassen, d.h. wir wählen $\tau = 0$ für $s = 0$ und umgekehrt, also $\alpha = 0$. Wir können also die Charakteristiken in diesem Fall auch direkt über die Zeitvariable τ parametrisieren, die wir dann auch wieder t nennen. Die verbleibenden Gleichungen sind dann

$$\xi'(t) = b(\xi(t), t) \tag{2.7}$$

$$\frac{d}{dt} u(\xi(t), t) = 0. \tag{2.8}$$

Wie berechnen wir also die Lösung u an einem bestimmten Punkt (x, t). Dazu benötigen wir die Charakteristik durch (x, t), d.h. die Lösung des Endwertproblems

$$\xi(t; x, t) = x, \quad \partial_s \xi(s; x, t) = b(\xi(s; x, t), s). \tag{2.9}$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist die Lösung dieses Problems eindeutig, wenn b stetig ist und eine Lipschitz-Bedingung bezüglich x erfüllt. Da die Lösung u wie oben gezeigt entlang dieser Charakteristik konstant ist, können wir den Funktionswert eindeutig bis zur Zeit 0 zurückverfolgen, d.h. es gilt mit der Anfangsbedingung

$$u(x, t) = u(\xi(0; x, t), 0) = u_0(\xi(0; x, t)).$$

Damit haben wir unser erstes Resultat zur Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung bewiesen, basierend auf einer beinahe expliziten Lösungsdarstellung:

Satz 2.1. *Sei $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $b \in C_b(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ erfülle eine Lipschitz-Bedingung bezüglich x. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ von (2.1), die durch*

$$u(x, t) = u_0(\xi(0; x, t)) \quad \text{mit} \quad \xi(t; x, t) = x, \partial_s \xi(s; x, t) = b(\xi(s; x, t), s) \tag{2.10}$$

berechnet werden kann.

Wir betrachten nun ein einfaches Beispiel, weitere werden wir in den Übungen kennen lernen.

Beispiel 2.2. Wir lösen die Transportgleichung (2.1) im Fall eines konstanten Vektorfelds b. Die Charakteristiken sind dann durch

$$\xi(t; x, t) = x, \partial_s \xi(s; x, t) = b \quad \Rightarrow \xi(s; x, t) = x - b(t - s) \tag{2.11}$$

gegeben. Damit erhalten wir aus (2.10) die Darstellung

$$u(x, t) = u_0(x - bt).$$

Die Lösung zur Zeit t ist also nur eine Verschiebung des Anfangswerts in Richtung des Vektors b.

Analog können wir auch zur Lösung von (2.2) vorgehen. Dazu schreiben wir die Gleichung als

$$\partial_t u + b \cdot \nabla u = -(\nabla \cdot b) u$$

und sehen, dass entlang der selben Charakteristik wie oben gilt

$$\partial_s u(\xi(s), s) = -(\nabla \cdot b)(\xi(s), s) u(\xi(s), s).$$

Dies bedeutet, wir müssen den Raum der Charakteristiken um eine Dimension erweitern und suchen nun eine Kurve

$$\gamma(s) := (\xi(s), s, \phi(s)) \in \mathbb{R}^{n+2}$$

mit

$$\phi'(s) = -(\nabla \cdot b)(\xi(s), s)\phi(s).$$

Glücklicherweise ist die zusätzliche Differentialgleichung für ϕ eine lineare Gleichung, die gelöst werden kann, nachdem man ξ berechnet hat. Dies liegt daran, dass die Transportgleichung (2.2) linear war. Im einer nichtlinearen Verallgemeinerung kann es, wie wir noch sehen werden, dazu kommen dass die Differentialgleichung für ϕ nichtlinear und voll mit der Gleichung für ξ gekoppelt wird.

In unserem Fall ist $a(s) := -(\nabla \cdot b)(\xi(s), s)$ eine gegebene stetige Funktion, wenn $\nabla \cdot b \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ gilt (man beachte, dass ξ sogar stetig differenzierbar insbesondere stetig ist). Wir können ϕ nun relativ einfach als Lösung der separablen linearen Differentialgleichung

$$\phi'(s) = a(s)\phi(s)$$

berechnen und erhalten

$$\phi(s) = \phi(0) e^{A(s)}, \qquad \text{mit } A(s) = \int_0^s a(\sigma) \, d\sigma.$$

Dies bedeutet wir erhalten eine Lösungsformel für (2.2) mit $u(\gamma(s)) = \phi(s)$ bzw. durch Rückverfolgen der Charakteristiken und Einsetzen des Anfangswerts als

$$u(x, t) = u_0(\xi(0; x, t)) e^{A(x,t)}, \qquad A(x, t) = -\int_0^t (\nabla \cdot b)(\xi(s; x, t), s) \, ds. \tag{2.12}$$

2.1.2 Eigenschaften der Lösung

Wir diskutieren nun noch einige strukturelle Eigenschaften der Lösungen von Transportgleichungen. Dabei beginnen wir wieder mit (2.1). Aus der Lösungsformel (2.10) sehen wir, dass u für $t > 0$ nur Funktionswerte annehmen kann, die auch schon zur Zeit $t = 0$ angenommen wurden, d.h.

$$\{ \ z \mid \exists \ x : z = u(x,t) \ \} \subset \{ \ z \mid \exists \ x : z = u_0(x) \ \}, \qquad \forall t > 0. \tag{2.13}$$

Daraus folgt auch ein *Maximumprinzip*

$$\inf_x u_0(x) \leq \inf_x u(x,t) \leq \sup_x u(x,t) \leq \sup_x u_0(x). \tag{2.14}$$

Das Minimum und Maximum von u werden also, falls sie existieren, bereits zur Zeit $t = 0$ (also am Rand unseres Raum-Zeit Gebiets) angenommen. Wir werden sehen, dass diese Eigenschaft auch für viele andere partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung gilt.

Neben dem Maximumprinzip erhalten wir auch eine Stabilitätseigenschaft in der Supremumsnorm, d.h. es gilt

$$\|u(.,t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty. \tag{2.15}$$

Diese kann, wegen der Linearität von (2.1), sofort in eine Kontraktivitätseigenschaft der Evolutionsgleichung übersetzt werden. Sind u^1 und u^2 Lösungen von (2.1) mit Anfangwerten u_0^1 bzw. u_0^2, so folgt dass $u^1 - u^2$ eine Lösung mit Anfangswert $u_0^1 - u_0^2$ ist. Also erhalten wir aus der Stabilitätseigenschaft

$$\|u^1(.,t) - u^2(.,t)\|_\infty \leq \|u_0^1 - u_0^2\|_\infty. \tag{2.16}$$

Im Fall von (2.2) können wir kein Maximumprinzip erwarten, da der Exponentialterm in der Lösungsdarstellung im Allgemeinen wachsen kann. Wir sehen aber, dass wir ein Maximumprinzip und L^∞-Stabilität unter der Bedingung

$$\nabla \cdot b \geq 0 \qquad \forall \ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \tag{2.17}$$

gilt.

Im Fall von Integralen der Lösung u sieht das Verhalten umgekehrt aus. Im Fall von (2.2) sehen wir, dass der Mittelwert von u immer erhalten bleibt, falls u für $|x| \to \infty$ hinreichend schnell abfällt. Dies folgt aus

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t) \ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(x,t) \ dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot (b(x,t)u(x,t)) \ dx \tag{2.18}$$

und dem Gauss'schen Satz, da

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot (b(x,t)u(x,t)) \ dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} \nabla \cdot (b(x,t)u(x,t)) \ dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R(0)} bu \cdot n \ d\sigma \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R(0)} bu \cdot \frac{x}{R} \ d\sigma.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$|\int_{\partial B_R(0)} bu \cdot \frac{x}{R}\, d\sigma| \le \omega_n R^{n-1} \sup_{x\in B_R(0)} |b(x,t)u(x,t)| \le \omega_n \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus B_R(0)} (|b(x,t)|\ |u(x,t)|\ |x|^{n-1})$$

wobei die Konstante ω_n die Oberfläche der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Der Grenzwert ist also Null, wenn

$$bu|x|^{n-1} \to 0 \quad \text{für } |x| \to \infty.$$

Für (2.1) gilt dies nur, wenn $\nabla \cdot b = 0$ ist, da man sonst ein zusätzliches Integral in der Identität erhält, das nicht gegen null konvergiert. Wir werden sehen, dass die Erhaltung des Mittelwerts eine typische Eigenschaft von Gleichungen in Divergenz-Form, d.h.

$$\partial_t u + \nabla \cdot J = 0$$

für ein Vektorfeld J, ist.

Für (2.2) können wir allgemeiner das Verhalten von Integralen über Funktionen von u untersuchen, d.h. mit einer differenzierbaren Funktion F mit der sinnvollen Normierung $F(0) = 0$ und $f = F'$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} F(u(x,t))\ dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u(x,t))\partial_t u(x,t)\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u(x,t))\nabla\cdot(b(x,t)u(x,t))\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\cdot(b(x,t)F(u(x,t)))\ dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\cdot b(x,t))H(u(x,t))\ dx,\end{aligned}$$

wobei $H(v) := F(v) - vF'(v)$. Fällt $bF(u)$ wieder hinreichend schnell, dann verschwindet der erste Term und wir haben

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} F(u)\ dx = -\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\cdot b)H(u)\ dx.$$

Ist F konvex, dann folgt

$$H(v) = F(v) + F'(v)(0 - v) - F(0) \le 0.$$

Also ist, falls $\nabla \cdot b \ge 0$ gilt, das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} F(u)\ dx$ in der Zeit monoton fallend und damit beschränkt. Ist $\nabla \cdot b \le 0$, so erhält man eine analoge Aussage für konkave F.

2.2 Poisson Gleichung

Wir untersuchen im Folgenden die *Poisson-Gleichung*

$$-\Delta u = f. \tag{2.19}$$

Im Fall $f = 0$ nennt man (2.19) *Laplace-Gleichung*.

2.2.1 Lösungsdarstellung

Wir beginnen mit der Laplace Gleichung in $\mathbb{R}^n$ und suchen zunächst eine rotationssymmetrische Lösung, d.h.

$$u(x) = v(r), \qquad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}. \tag{2.20}$$

Wegen

$$\partial_{x_i} r = \frac{x_i}{r}$$

folgt mit der Kettenregel

$$\partial_{x_i} u = v'(r)\frac{x_i}{r} \qquad \partial_{x_i x_i} u = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right).$$

Also erhalten wir die Transformation des Laplace-Operators als

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) \tag{2.21}$$

für $r > 0$. Die rotationssymmetrische Laplace-Gleichung kann dann also als (separable) gewöhnliche Differentialgleichung für v' geschrieben werden, nämlich

$$(v')' = \frac{1-n}{r} v'(r).$$

Integration liefert

$$\log v' = (1-n)\log r + \alpha$$

mit einer Integrationskonstante α, also

$$v'(r) = e^{\alpha} r^{1-n}.$$

Als nächsten Schritt erhalten wir dann die Lösung

$$v(r) = \begin{cases} \beta \log r + \gamma & \text{für } n = 2, \\ \beta r^{2-n} + \gamma & \text{für } n \geq 3, \end{cases} \tag{2.22}$$

mit Konstanten β und γ. Eine beschränkte Lösung erhalten wir nur mit $\gamma = 0$. Da jedes Vielfache von v offensichtlich wieder eine Lösung liefert, kann β beliebig gewählt werden. Wir werden eine bestimmte

Definition 2.3. Die Funktion

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x| & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\eta_n}|x|^{2-n} & \text{für } n \geq 3, \end{cases} \tag{2.23}$$

heisst *Grundlösung* der Laplace-Gleichung.

Für beliebiges $y \in \mathbb{R}^n$ ist $\Phi(. - y)$ immer eine Lösung der Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Integrieren wir diese Terme über y so erhalten wir die Faltung von f mit der Grundlösung Φ

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy. \tag{2.24}$$

Es ist naheliegend $\Delta u = 0$ zu vermuten, wenn wir den Laplace-Operator und das Integral vertauschen. Dies ist allerdings falsch, da wir wegen der Singularität bei $y = x$ diese Vertauschung nicht durchführen können. Es stellt sich hingegen heraus, dass in einem verallgemeinerten Sinn

$$-\Delta\Phi(x-y) = \delta(x-y)$$

gilt, wobei δ die Dirac-delta Distribution bezeichnet. Letztere ist das Einselement der Faltung und damit ist

$$-\Delta u = -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\Phi(x-y)f(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x-y)f(y)\ dy = f(x).$$

Also erhalten wir aus (2.24) eine Lösung der Poisson-Gleichung. Dies werden wir im Folgenden beweisen:

Satz 2.4. *Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger und u definiert durch* (2.24)*. Dann gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und u löst die Poisson-Gleichung* (2.19)*.*

Beweis. Mit einer einfachen Transformation der Integrationsvariable gilt

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y)\ dy$$

und damit für die Differenzenquotienten (e_i sei der i-te Einheitsvektor)

$$\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h}\ dy.$$

Da f als stetig differenzierbar vorausgesetzt wurde, gilt

$$\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h} \to \partial_{x_i}f(x-y)$$

gleichmässig auf dem kompakten Träger von f, bzw. sogar Gleichheit von Differenzenquotient und Ableitung ausserhalb (beide verschwinden). Damit sind die Differenzenquotienten gleichmässig (bezüglich y) beschränkt. Da Φ eine Funktion in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, folgt dass (für jede Folge $h_n \to 0$

$$\varphi_x^n(y) := \Phi(y)\frac{f(x+h_ne_i-y)-f(x-y)}{h_n}$$

punktweise fast überall gegen

$$\varphi_x(y) := \Phi(y)\partial_{x_i}f(x-y)$$

konvergiert und durch eine L^1-Funktion majorisiert wird. Damit darf nach dem Satz der majorisierten Konvergenz der Grenzwert mit dem Integral vertauscht werden und es folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\partial_{x_i}f(x-y)\ dy$$

Daraus folgt die Differenzierbarkeit von u. Wenden wir ein analoges Verfahren auf $\partial_{x_i}u$ an, so erhalten wir die Existenz zweiter Ableitungen, gegeben durch

$$\partial_{x_ix_j}u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\partial_{x_ix_j}f(x-y)\ dy.$$

Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz zeigt man leicht die Stetigkeit des Integrals bezüglich x und damit folgt $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Weiters erhalten wir

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta f(x-y)\ dy$$

Wir teilen das Integral auf zu

$$\Delta u(x) = \underbrace{\int_{B_\epsilon(0)} \Phi(y)\Delta f(x-y)\ dy}_{=:I(\epsilon)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \Phi(y)\Delta f(x-y)\ dy}_{=:j(\epsilon)}.$$

Den ersten Term können wir mit Hilfe einer einfachen Abschätzung und Transformation in Polarkoordinaten abschätzen:

$$\begin{aligned} |I(\epsilon)| &\leq \|\Delta f\|_\infty \int_{B_\epsilon(0)} \Phi(y)\ dy \\ &= \|\Delta f\|_\infty \omega_n \int_0^\epsilon \Phi(r)\ r^{n-1} dr \\ &= C \begin{cases} \int_0^\epsilon |\log r|\ r dr & n = 2 \\ \int_0^\epsilon r dr & n \geq 3 \end{cases} \\ &= \tilde{C} \begin{cases} |\log \epsilon|\ \epsilon^2 & n = 2 \\ \epsilon^2 & n \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Also gilt $I(\epsilon) \to 0$ mit $\epsilon \to 0$.

Für den zweiten Term erhalten wir mit partieller Integration

$$J(\epsilon) = -\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \nabla\Phi(y) \cdot \nabla f(x-y)\ dy}_{=:K(\epsilon)} - \underbrace{\int_{\partial B_\epsilon(0)} \Phi(y) \partial_n f(x-y)\ d\sigma(y)}_{=:L(\epsilon)}.$$

Den zweiten Term schätzen wir ähnlich zu $I(\epsilon)$ als

$$|L(\epsilon)| \leq \|\nabla f\|_\infty \int_{\partial B_\epsilon(0)} |\Phi(y)|\ d\sigma(y) = C \begin{cases} |\log \epsilon|\ \epsilon & n = 2 \\ \epsilon & n \geq 3, \end{cases}$$

also folgt $L(\epsilon) \to 0$. Eine weitere partielle Integration in $K(\epsilon)$ liefert zusammen mit der Tatsache, dass Φ in $\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)$ harmonisch ist,

$$\begin{aligned} K(\epsilon) &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \Delta\Phi(y) f(x-y)\ dy + \int_{\partial B_\epsilon(0)} \partial_n \Phi(y) f(x-y)\ d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial B_\epsilon(0)} \partial_n \Phi(y) f(x-y)\ d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial B_\epsilon(0)} \nabla\Phi(y) \cdot \frac{y}{\epsilon} f(x-y)\ d\sigma(y). \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$\nabla\Phi(y) = -\frac{1}{n\eta_n} \frac{y}{|y|^n} = -\frac{1}{\omega_n} \frac{y}{\epsilon^n}$$

und damit

$$\nabla\Phi(y)\cdot\frac{y}{\epsilon} = -\frac{1}{\omega_n}\frac{|y|^2}{\epsilon^{n+1}} = -\frac{1}{\omega_n\epsilon^{n-1}}$$

auf $\partial B_\epsilon(0)$. Da $\omega_n\epsilon^{n-1}$ das Oberflächenmaß von $\partial B_\epsilon(0)$ ist, folgt

$$K(\epsilon) = -\fint_{\partial B_\epsilon(0)} f(x-y)\ d\sigma(y) = -\fint_{\partial B_\epsilon(x)} f(z)\ d\sigma(z).$$

Für stetige Funktionen konvergiert das Mittel mit abnehmendem Radius gegen den Funktionswert, d.h. $K(\epsilon)\to f(x)$. Da ϵ beliebig gewählt war, können wir auch $\epsilon\to 0$ betrachten und erhalten dann $-\Delta u = f$. $\square$.

Das Resultat gilt auch unter wesentlich schwächeren Regularitätsanforderungen an f, z.B. genügt Hölder-Stetigkeit (cf. [3]).

In einem beschränkten Gebiet gilt die Darstellung mit der Grundlösungen im Allgemeinen nicht, da noch Randbedingungen zu erfüllen sind. Wir betrachten dazu das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für ein beschränktes Gebiet $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Wir beginnen zunächst mit dem Fall $g=0$. Hier können wir wegen der Linearität die Lösung zerlegen in den obigen Teil und einen Korrekturterm, d.h.

$$u(x) = \int_\Omega \Phi(x-y)f(y)\ dy + v(x), \tag{2.25}$$

wobei v eine harmonische Funktion ist mit

$$v(x) = -\int_\Omega \Phi(x-y)f(y)\ dy \qquad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2.26}$$

Wir machen für v auch einen Integralansatz, dieses mal in der Form

$$v(x) = \int_\Omega H(x,y)f(y)\ dy. \tag{2.27}$$

Man erhält eine harmonische Funktion v, wenn H bezüglich x harmonisch ist, d.h.

$$\Delta_x H(x,y) = 0 \qquad x\in\Omega \tag{2.28}$$

und die Randbedingung folgt, falls

$$H(x,y) = -\Phi(x-y) \qquad x\in\partial\Omega. \tag{2.29}$$

Damit können wir die Lösung des Dirichlet-Problems mit Randwert Null als

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)\ dy \tag{2.30}$$

mit der sogenannten *Green-Funktion*

$$G(x,y) = \Phi(x-y) + H(x,y). \tag{2.31}$$

Für die Lösung des Dirichlet-Problems mit Randwert g lässt sich ebenfalls eine Darstellung basierend auf der Green-Funktion herleiten (cf. [1]), es gilt dann

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)\ dy + \int_{\partial\Omega} \partial_n G(x,y)g(y)\ d\sigma(y). \tag{2.32}$$

2.2.2 Eigenschaften der Lösung

Eine wichtige Eigenschaft harmonischer Funktionen, d.h. von Lösungen der Laplace-Gleichung ist die *Mittelwertformel*:

Satz 2.5 (Mittelwerteigenschaft). *Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch in Ω, dann gilt für jede Kugel $B_R(x) \subset \Omega$*

$$u(x) = ⨍_{B_R(x)} u(y)\ dy = ⨍_{\partial B_R(x)} u(y)\ d\sigma(y). \tag{2.33}$$

Beweis. Für $0 \leq r \leq R$ sei

$$\phi(r) = ⨍_{\partial B_r(x)} u(y)\ d\sigma(y) = ⨍_{\partial B_1(0)} u(x+rz)\ d\sigma(z),$$

dann gilt mit Kettenregel und dem Gauss'schen Integralsatz (wegen der zweimal stetigen Differenzierbarkeit von u dürfen wir Differentiation und Integration vertauschen)

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= ⨍_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+rz)\cdot z\ d\sigma(z) \\
&= ⨍_{\partial B_r(x)} \nabla u(y)\cdot \frac{y-x}{r}\ d\sigma(y) \\
&= ⨍_{\partial B_r(x)} \nabla u(y)\cdot n\ d\sigma(y) \\
&= \frac{r}{n} ⨍_{B_r(x)} \Delta u(y)\ dy = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist ϕ konstant und es folgt

$$u(x) = \lim_{r\to 0} \phi(r) = \phi(R) = ⨍_{\partial B_R(x)} u(y)\ d\sigma(y)$$

sowie

$$u(x) = \phi(R) = \frac{1}{R}\int_0^R \phi(r)\ dr = \frac{1}{R}\int_0^R ⨍_{\partial B_r(x)} u(y)\ d\sigma(y)\ dr = ⨍_{B_R(x)} u(y)\ d\sigma(y). \qquad \square$$

Wie man leicht sieht, gilt auch die Umkehrung der Mittelwerformel, d.h. eine Funktion ist dann harmonisch, wenn sie für alle in Ω enhaltenen Kugeln die Mittelwertformel erfüllt. Aus der Mittelwerteigenschaft erhalten wir sofort einige weitere strukturelle Eigenschaften harmonischer Funktionen, unter anderem das Maximumprinzip, das in diesem Fall sogar stärker als bei der Transportgleichung ist:

Satz 2.6 (Starkes Maximumprinzip). *Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω.*

(i) Dann gilt

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x).$$

(ii) Ist Ω einfach zusammenhängend und existiert ein Punkt x_0 im Inneren von Ω mit

$$u(x_0) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$$

dann ist u konstant in Ω.

Beweis. Wir beweisen (ii), da (i) direkt daraus folgt. Sei x_0 ein Maximum im Inneren von Ω, d.h. $u(x_0) = M$. Dann existiert eine Kugel um x_0, die in Ω liegt, und es gilt wegen der Mittelwerteigenschaft

$$M = u(x_0) = \fint_{B_R(x_0)} u(y)\; dy \leq M.$$

Daraus folgt $u \equiv M$ in $B_R(x_0)$, also ist die Menge

$$\{\ x \in \Omega \mid u(x) = M\ \}$$

offen. Wegen der Stetigkeit von u ist diese Menge auch relativ abgeschlossen in Ω. Beides ist nur möglich, wenn

$$\Omega = \{\ x \in \Omega \mid u(x) = M\ \}$$

gilt, also ist u konstant. □.

Da unter den Voraussetzungen des Maximumprinzips auch $-u$ harmonisch ist, folgt die selbe Aussage auch für das Minimum.

Eine direkte Folgerung aus dem Maximumprinzip ist die Eindeutigkeit des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung

Satz 2.7. *Sei $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Dann gibt es höchstens eine Lösung des Dirichlet-Problems*

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \tag{2.34}$$

$$u = g \qquad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2.35}$$

Beweis. Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen des Dirichlet-Problems, dann gilt wegen der Linearität, dass $u := u_1 - u_2$ eine harmonische Funktion mit $u \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ ist. Also folgt aus dem Maximumprinzip

$$0 = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x), \qquad 0 = \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x),$$

d.h. $u \equiv 0$. □

Im eindimensionalen Fall sehen wir, dass eine harmonische Funktion (d.h. zweite Ableitung identisch null) quadratisch und damit insbesondere analytisch sein muss. Im mehrdimensionalen Fall ist dies nicht ganz klar, da ja nur die Summe der zweiten Ableitungen verschwindet. Ausserdem könnte ein Randwert g zwar stetig, aber nicht differenzierbar sein, sodass man nicht einmal Differenzierbarkeit von u auf $\overline{\Omega}$ erwarten kann. Im Inneren des Gebiets erhält man aber eine starke Regularität, wie das folgende Resultat zeigt:

Satz 2.8 (Innere Regularität). *Sei u harmonisch in Ω. Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Beweis. Wir konstruieren zunächst eine geglätte Version von u mit Hilfe eines *Mollifiers*

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{2.36}$$

wobei die Konstante C so gewählt wurde, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\; dx = 1$ gilt. Dazu verwenden wir eine reskalierte Version von η, definiert als

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

und die Notation $\tilde{\eta}(|x|) = \eta(x)$, da η nur von der Norm von x abhängt. Man sieht leicht, dass $\eta_\epsilon \in C^\infty(R^n)$ gilt und der Träger von η_ϵ die Kugel $B_\epsilon(x)$ ist. Sei nun

$$x \in \Omega_\epsilon := \{\ y \in \Omega \mid d(y, \partial\Omega) > \epsilon\ \}.$$

Dann definieren wir die geglätte Version u^ϵ von u als

$$\begin{aligned}
u^\epsilon(x) &= (\eta_\epsilon * u)(x) \\
&= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) u(y)\ dy \\
&= \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \tilde{\eta}\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \int_{\partial B_r(x)} u(y)\ d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Mit der Mittelwertformel erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
u^\epsilon(x) &= u(x)\frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \tilde{\eta}\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \int_{\partial B_r(x)} 1\ d\sigma(y) \\
&= u(x)\frac{1}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\ dy \\
&= u(x) \int_{B_1(0)} \eta(z)\ dz = u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z)\ dz = u(x).
\end{aligned}$$

Also folgt $u \equiv u^\epsilon$ in Ω_ϵ und da $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ folgt auch $u = \eta_\epsilon * u \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$. Da ϵ beliebig ist, können wir den Grenzwert gegen Null betrachten und erhalten daraus $u \in C^\infty(\Omega)$. $\square$

Einige weitere interessante Eigenschaften, die wir hier nicht beweisen, sind (cf. [1]):

- **Schranken an Ableitungen:** Sei u harmonisch in Ω und $B_r(x) \subset \Omega$. Dann gilt für $|\alpha| = k$
$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C_k}{r^k} \fint_{B_r(x)} |u(y)|\ dy. \tag{2.37}$$
- **Satz von Liouville:** Sei u harmonisch auf $\mathbb{R}^n$, dann ist u konstant.
- **Harnack Ungleichung:** Sei U offen und einfach zusammenhängend, sodass eine kompakte Menge K mit $U \subset K \subset \Omega$ existiert. Dann existiert eine Konstante C, sodass
$$\sup_{x \in U} u(x) \leq C \inf_{x \in U} u(x)$$
für jede harmonische Funktion in Ω gilt.

Für die Lösung der Poisson-Gleichung ist zu beachten, dass u immer in die Summe einer Faltung mit der Grundlösung (die man explizit analysieren kann) und einer harmonische Funktion zerlegt werden kann, sodass die Eigenschaften auch teilweise auf Lösungen der Poisson-Gleichung erweitert werden können.

2.2.3 Energiemethoden

Zum Abschluss wollen wir noch einen kurzen Ausblick auf Energiemethoden für elliptische partielle Differentialgleichungen geben. Dazu betrachten wir das Energiefunktional

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega v \; f \; dx. \tag{2.38}$$

Wir werden sehen, dass eine Lösung der Poisson-Gleichung ein Minimum des Energiefunktionals ist. Dies entspricht auch der typischen physikalischen Motivation, die Lösungen elliptischer Gleichungen oft als Gleichgewichtszustände und damit Energieminima herleiten.

Satz 2.9. *Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems*

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \tag{2.39}$$

$$u = g \qquad \text{auf } \partial\Omega, \tag{2.40}$$

genau dann wenn u die Randbedingung erfüllt und für alle $v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $v = g$ auf $\partial\Omega$

$$E(u) \leq E(v) \tag{2.41}$$

gilt.

Beweis. Sei u eine Lösung des Dirichlet-Problems und v wie oben, dann gilt mit dem Gauss'schen Integralsatz

$$\begin{aligned} E(u) - E(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2) \, dx - \int_\Omega f(u-v) \, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega (-|\nabla(u-v)|^2 + 2\nabla(u-v)\nabla u) \, dx - \int_\Omega f(u-v) \, dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 \, dx - \int_\Omega (\Delta u + f)(u-v) \, dx + \int_{\partial\Omega} \partial_n u(u-v) \, d\sigma(x) \end{aligned}$$

Da $\Delta u + f = 0$ in Ω und $u - v = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt, verschwinden die letzten beiden Integrale. Also folgt

$$E(u) - E(v) \leq -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 \, dx \leq 0.$$

Gelte umgekehrt $E(u) \leq E(v)$ für alle v wie oben. Dann können wir insbesondere $v = u \pm \epsilon\varphi$ wählen für $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$. Also gilt mit einer analogen Rechnung

$$\begin{aligned} 0 \leq E(u \pm \epsilon\varphi) - E(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla(u+\epsilon\varphi)|^2 - |\nabla u|^2) \, dx - \int_\Omega f\varphi \, dx \\ &= \frac{\epsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx \pm \epsilon\int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi \, dx \pm \epsilon\int_{\partial\Omega} \partial_n u \; \varphi \; d\sigma(x) \end{aligned}$$

Das letzte Integral verschwindet wieder wegen $\varphi = 0$ und nach Division durch ϵ gilt

$$0 \leq \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx \pm \int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi \, dx.$$

Wir können nun den Grenzwert ϵ gegen Null durchführen und erhalten

$$0 \leq \pm \int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi \, dx,$$

was nur möglich ist, wenn das Integral für alle φ verschwindet. Dies ist aber wiederum nur möglich, wenn $-\Delta u = f$ in Ω gilt. $\square$

Die Durchführung des Grenzwerts im zweiten Teil des Beweises kann als Ableitung des Energiefunktionals interpretiert werden, die Poisson-Gleichung als Optimalitätsbedingung erster Ordnung für die Energieminimierung. Da das Energiefunktional strikt konvex ist, ist keine Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung nötig. Wir werden später noch sehen, dass im Allgemeinen kein Minimum in $C^1(\Omega)$ oder gar $C^2(\Omega)$ existiert und wir auf passende grössere Funktionenräume ausweichen müssen.

2.3 Wärmeleitungsgleichung

Im Folgenden betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u = \Delta u \qquad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{2.42}$$

bzw. der inhomogenen Version

$$\partial_t u = \Delta u + f \qquad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+. \tag{2.43}$$

In beiden Fällen werden wir dazu Anfangswerte

$$u(.,0) = u_0 \qquad \text{in } \Omega \tag{2.44}$$

vorgeben. Im Fall eines beschränkten Gebiets werden wir auch noch Randbedingungen auf $\partial \times [0,T]$ fordern.

2.3.1 Lösungsdarstellung

Wir beginnen wieder mit der Berechnung einer speziellen Lösung. Dazu machen wir zunächst eine Beobachtung zur Skalierung. Wir sehen, dass falls u eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung (2.42) ist, auch

$$v(x,t) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

eine Lösung von (2.42) ist für $\lambda \in \mathbb{R}$. Bei dieser Transformation ist $\frac{x}{\sqrt{t}}$ invariant und wir suchen deshalb eine spezielle Lösung mit dieser Variable, genauer

$$u(x,t) = t^\alpha U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \tag{2.45}$$

Wir berechnen leicht

$$\Delta u = t^{\alpha-1}\Delta U$$

und

$$\partial_t u = \alpha t^{\alpha-1} U - \frac{1}{2} t^{\alpha-1} \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \nabla U.$$

Also haben wir die Gleichung

$$\Delta U(y) = \alpha U(y) - \frac{1}{2} y \cdot \nabla U(y).$$

Analog zur Poisson-Gleichung machen wir nun einen radialsymmetrischen Ansatz, $r = |y|$, mit

$$U(y) = w(|y|) = w(r).$$

Damit erhalten wir

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0$$

Mit der Wahl $\alpha = \frac{n}{2}$ erhalten wir

$$(r^{n-1} w')' + \frac{1}{2}(r^n w)' = 0$$

Nach Integration folgt

$$r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = c$$

mit einer Konstante c. Wir suchen weiter eine Lösung deren Ableitungen für $r \to \infty$ gegen Null konvergieren und damit wählen wir $c = 0$. Es bleibt die Differentialgleichung

$$w' = -\frac{1}{2} r w,$$

woraus folgt

$$w(r) = \gamma e^{-\frac{r^2}{4}}.$$

Mit einer speziellen Wahl der Konstante γ und Rückeinsetzen zu u erhalten wir die Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung:

Definition 2.10. Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ definiert durch

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \tag{2.46}$$

heisst Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung.

Man beachte, dass die Skalierung in der Grundlösung so gewählt, wurde, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x,t)\ dx = 1$$

für alle $t \in \mathbb{R}^+$ gilt. Für $t \to 0$ konvergiert Φ punktweise in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gegen Null, im Punkt $x = 0$ jedoch gegen unendlich. Dies legt nahe, dass der richtige Grenzwert $\Phi(.,0)$ tatsächlich die Dirac-delta Distribution ist und wir die Lösung des Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung durch eine Faltung des Anfangswerts mit der Grundlösung

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y,t) u_0(y)\ dy \tag{2.47}$$

erhalten, was das nächste Resultat auch bestätigt:

Satz 2.11. *Sei $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für die Funktion $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch* (2.47)

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [\epsilon, \infty))$ *for every* $\epsilon > 0$.

(ii) $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.

(iii) u *löst das Anfangswertproblem* (2.42), (2.44).

Beweis. Da für $t > 0$ die Grundlösung Φ analytisch und damit unendlich oft differenzierbar ist, sowie alle Ableitungen von Φ absolut integrierbar sind, sehen wir sofort (i). Um (ii) und auch (2.44) zu erhalten genügt es den Grenzwert $t \to 0$ zu betrachten. Sei dazu $z \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ so gewählt, dass

$$|u_0(x) - u_0(z)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in B_\delta(z)$$

gilt (so ein δ existiert wegen der Stetigkeit von u_0. Sei nun $x \in B_{\frac{\delta}{2}}(z)$, dann gilt

$$\begin{aligned} |u(x,t) - u_0(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)(u_0(y) - u_0(z)) \right| \\ &\leq \underbrace{\int_{B_\delta(z)} \Phi(x-y,t)|u_0(y) - u_0(z)|\, dy}_{:=I} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(z)} \Phi(x-y,t)|u_0(y) - u_0(z)|\, dy}_{:=J}. \end{aligned}$$

Da $|u_0(y) - u_0(z)| < \epsilon$ auf $B_\delta(z)$ gilt, folgt

$$I < \epsilon \int_{B_\delta(z)} \Phi(x-y,t)\, dy < \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, dy = \epsilon.$$

Für $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_\delta(z)$ folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|y - z| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - z|$$

also $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - z|$. Sei C eine obere Schranke für $|u_0(x)|$ auf $\mathbb{R}^n$. Dann folgt

$$\begin{aligned} J &\leq 2C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(z)} \Phi(x-y,t)\, dy \\ &\leq \frac{\hat{C}}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(z)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy \\ &\leq \frac{\hat{C}}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(z)} e^{-\frac{|z-y|^2}{16t}}\, dy \\ &= \frac{\tilde{C}}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1}\, dr. \end{aligned}$$

Man sieht leicht (z.B. mit dominierter Konvergenz), dass der letzte Ausdruck (unabhängig von z) gegen Null geht für $t \downarrow 0$, für t beliebig klein folgt also

$$|u(x,t) - u_0(z)| < 2\epsilon \quad \text{für alle } x \in B_{\frac{\delta}{2}}(z), t < \tau$$

für hinreichend kleine δ und τ. Damit ist u stetig in $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ mit $u(x, 0) = u_0(x)$.

Da Φ für $t > 0$ unendlich oft differenzierbar und alle Ableitungen absolut integrierbar sind, können wir Differentiation und Integration vertauschen und erhalten sofort

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \Phi(x-y,t) - \Delta\Phi(x-y,t)) u_0(y) \; dy = 0,$$

d.h. u löst (2.42) $\square$.

Da die Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung für jedes $t > 0$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, kann man sie auch als Übergangswahrscheinlichkeit eine Markov-Prozesses interpretieren. Da $\Phi(x - y, 0)$ die bei y zentrierte Dirac-delta Distribution ist, startet der Prozess deterministisch mit einem Teilchen im Punkt y. $\Phi(x-y,t)$ ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen im Zeitintervall $(0, t)$ von y nach x springt. Analog kann man die Faltung (2.47) interpretieren, dabei ist $u_0(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Position eines Teilchens zur Zeit $t = 0$ und $u(x, t)$ die Dichte für die Position zur Zeit t.

Aus der Lösungsdarstellung (2.47) sieht man, dass die Waermeleitungsgleichung *unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit* hat. Dies bedeutet, dass lokale Änderungen in unendlich kurzer Zeit globale Auswirkungen haben, bzw. in der obigen stochastischen Interpretation, dass beliebig grosse Sprünge auch in beliebig kleinen Zeitintervallen noch positive Wahrscheinlichkeit haben. Mathematisch sieht man dies für einen nichtnegativen Anfangswert $u_0(x)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt nämlich für jede Zeit $t > 0$, dass $u(x,t) > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Die unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit ist ein deutlicher Unterschied zur Transportgleichung, in der die Änderung des Trägers durch das Geschwindigkeitsfeld b beschränkt war.

Wir bemerken an dieser Stelle nur kurz, dass eine ähnliche Lösungsdarstellung auch für das inhomogene Problem (2.43) gilt. Unter vernünftigen Bedingungen an f löst

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s) f(y,s) \; dy \; ds. \tag{2.48}$$

2.3.2 Eigenschaften der Lösung

Im folgenden diskutieren wir einige lokale und globale Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung. Zur funktionalanalytischen Behandlung benötigen wir noch passende Funktionenräume, wegen der unterschiedlichen Regularität in Ort und Zeit. Wir definieren den Raum

$$C^{2,1}(\Omega \times [0,T]) := C([0,T]; C^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T]; C(\mathbb{R}^n)), \tag{2.49}$$

in dem sowohl die erste Zeitableitung als auch die zweiten Ortsableitungen sinnvoll definiert sind.

Wie bei der Laplace-Gleichung erhält man auch bei der Wärmeleitungsgleichung ein Maximumprinzip, allerdings nur mit einem angepassten Gebiet und auch einer Gewichtung im Integral (Beweis siehe [1]):

Satz 2.12. *Sei $u \in C^{2,1}(\Omega \times [0,T])$ eine Lösung von (2.42), $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$ und r so, dass*

$$E(x,t;r) := \{ \; (y,s) \in \mathbb{R}^n \times (0,t) \mid \Phi(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^n} \; \} \subset \Omega \times (0,T)$$

gilt. Dann gilt die Mittelwerteigenschaft

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \int \int_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{|t-s|^2} \; dy \; ds \tag{2.50}$$

Ein Maximumprinzip kann man ebenfalls wieder über die Mittelwerteigenschaft beweisen, in diesem Fall wegen der Gewichtung im Integral allerdings mit mehr Aufwand als im Fall harmonischer Funktionen. Wir führen hier einen alternativen Beweis, basierend auf Approximation und Widerspruch:

Satz 2.13 (Maximumprinzip). *Sei $u \in C^{2,1}(\Omega \times [0,T])$ eine Lösung von (2.42), dann gilt*

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T]} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\partial\Omega_T}, \tag{2.51}$$

mit dem parabolischen Rand

$$\partial\Omega_T := (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{0\}). \tag{2.52}$$

Die gleiche Aussage gilt für das Minimum.

Beweis. Wir konstruieren eine Approximation $u^\epsilon := u + \epsilon t$ mit $\epsilon > 0$, dann erfüllt u^ϵ

$$\partial_t u^\epsilon - \Delta u^\epsilon = \epsilon.$$

Sei (x_0, t_0) das Argument eines Maximums von u^ϵ in $\Omega \times (0,T]$. Dann gilt

$$\partial_t u^\epsilon \geq 0, \quad \Delta u^\epsilon \leq 0,$$

und damit folgt der Widerspruch $0 < \epsilon \leq \epsilon$. Also hat u^ϵ kein Maximum im Inneren von Ω. Da für $\epsilon \downarrow 0$ u^ϵ gleichmässig gegen u konvergiert, wird auch das Maximum von u auf $\partial\Omega_T$ angenommen. □

Aus dem Maximumprinzip folgt wieder die Eindeutigkeit des Cauchy-Problems (2.42), (2.44) mit

$$u(x,t) = g(x,t) \qquad x \in \partial\Omega \times (0,T). \tag{2.53}$$

Aus der Mittelwerteigenschaft kann man analog zur Laplace-Gleichung wieder innere Regularität zeigen und detaillierte Abschätzungen für die Ableitungen herleiten (cf. [1]).

2.3.3 Energiemethoden

Wir untersuchen im Folgenden Energiemethoden für die Wärmeleitungsgleichung und deren Auswirkung auf die Analyse vor allem des Langzeitverhaltens. Dazu werden wir oft die Notation $u(t)$ benutzen, damit meinen wir $u(.,t)$ also die Lösung der Wärmeleitung zur Zeit t als Funktion des Ortes.

Wir betrachten zunächst das Dirichletproblem (2.43), (2.44), (2.53) und definieren in Analogie zur Poisson-Gleichung die Energie

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 \, dx - \int_\Omega f(x)u(x,t) \, dx. \tag{2.54}$$

Wir nehmen an, dass sowohl f als auch g unabhängig von t sind. Damit folgt für die Zeitableitung des Energiefunktionals

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = \int_\Omega \nabla u(x,t) \cdot \nabla \partial_t u(x,t) \, dx - \int_\Omega f(x)\partial_t u(x,t) \, dx.$$

Nach partieller Integration folgt

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) \;=\; \int_{\partial\Omega} \partial_n u(x,t)\partial_t u(x,t)\; d\sigma - \int_{\Omega} \Delta u(x,t)\partial_t u(x,t)\; dx - \int_{\Omega} f(x)\partial_t u(x,t)\; dx.$$

Da g als unabhängig von t angenommen wurde, folgt $\partial_t u(x,t) = 0$ auf $\partial\Omega \times (0,T)$ und damit verschwindet der erste Term. Mit Einsetzen von (2.43) folgt weiter

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -\int_{\Omega} |\partial_t u(x,t)|^2\; dx < 0.$$

Das Energiefunktional fällt also in der Zeit ab und kann nur wenn $\partial_t u = 0$ ist, stationär werden. Dies legt nahe, dass $u(t)$ für $t \to \infty$ gegen die Lösung der Poisson-Gleichung konvergiert. Sei u_∞ die Lösung der Poisson-Gleichung mit Randwert g, dann gilt

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(u(x,t) - u_\infty(x))^2\; dx = 2\int_{\Omega} \partial_t u(x,t)(u(x,t) - u_\infty(x))\; dx.$$

Mit Einsetzen von (2.43) und $f = -\Delta u_\infty$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(u(x,t) - u_\infty(x))^2\; dx \;&=\; 2\int_{\Omega}(\Delta u(x,t) + f(x,t))(u(x,t) - u_\infty(x))\; dx \\
&=\; 2\int_{\Omega}(\Delta u(x,t) - \Delta u_\infty(x,t))(u(x,t) - u_\infty(x))\; dx \\
&=\; 2\int_{\partial\Omega} \partial_n(u(x,t) - u_\infty(x,t))(u(x,t) - u_\infty(x))\; dx \\
&\quad\; -2\int_{\Omega} |\nabla(u(x,t) - u_\infty(x))|^2\; dx.
\end{aligned}$$

Wegen $u(x,t) = u_\infty(x) = g(x)$ auf $\partial\Omega$ verschwindet der erste Term, also folgt

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(u(x,t) - u_\infty(x))^2\; dx \le -2\int_{\Omega} |\nabla(u(x,t) - u_\infty(x))|^2\; dx.$$

Um die rechte Seite weiter abzuschätzen, verwenden wir die Friedrichs-Ungleichung (ohne Beweis):

Satz 2.14 (Friedrichs-Ungleichung). *Sei $v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $v = 0$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} v(x)^2\; dx \le c\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2\; dx$$

mit einer Konstante $c > 0$ unabhängig von v.

Es gilt also mit $\lambda := \frac{1}{c}$:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(u(x,t) - u_\infty(x))^2\; dx \le -2\lambda\int_{\Omega}(u(x,t) - u_\infty(x))^2\; dx$$

und mit der Gronwall-Ungleichung erhalten wir daraus

$$\int_{\Omega}(u(x,t) - u_\infty(x))^2\; dx \le e^{-2\lambda t}\int_{\Omega}(u_0(x) - u_\infty(x))^2\; dx.$$

Damit konvergiert u exponentiell schnell gegen die Lösung der Poisson-Gleichung in der L^2-norm

$$\|u(t) - u_\infty\|_{L^2} \leq e^{-\lambda t} \ \|u_0 - u_\infty\|_{L^2}.$$

Auch die Eindeutigkeit der Lösung kann man analog beweisen. Sei u die Lösung von (2.42) mit $u = 0$ auf $\partial\Omega \times (0,T)$ mit Anfangswert $u_0 = 0$. Dann gilt mit der selben Rechnung wie oben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)^2 \ dx &= 2\int_\Omega u(x,t)\partial_t u(x,t) \ dx \\ &= 2\int_\Omega u(x,t)\Delta u(x,t) \ dx \\ &= -2\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 \ dx. \end{aligned}$$

Aus der Friedrichs-Ungleichung folgt

$$\int_\Omega u(x,t)^2 \ dx \leq e^{-2\lambda t}\int_\Omega u_0(x)^2 \ dx = 0,$$

wegen $u_0 \equiv 0$. Also folgt $u \equiv 0$.

Einige weitere Eigenschaften erhalten wir nur für das Neumann-Problem (analog auch für das Problem im ganzen Raum) der homogenen Wärmeleitungsgleichung. D.h. (2.42), (2.44) mit

$$\partial_n u(x,t) = 0 \qquad x \in \partial\Omega \times (0,T). \tag{2.55}$$

In diesem Fall wird der Mittelwert erhalten, d.h.

$$\int_\Omega u(x,t) \ dx = \int_\Omega u_0(x) \ dx. \tag{2.56}$$

Dies sieht man sofort mit dem Gauss'schen Satz und Einsetzen der Randbedingung, da

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t) \ dx = \int_\Omega \partial_t u(x,t) \ dx = \int_\Omega \Delta u(x,t) \ dx = \int_{\partial\Omega} \partial_n u(x,t) \ d\sigma = 0.$$

Man rechnet auch wieder nach, dass für die obige Energie E die Energiedissipationseigenschaft gilt, also

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -\int_\Omega |\Delta u(x,t)|^2 \ dx.$$

In diesem Fall erhalten wir auch Dissipationseigenschaften für sogenannte *Entropien*

$$\Psi(u(t)) = \int_\Omega \psi(u(x,t)) \ dx \tag{2.57}$$

wobei ψ eine konvexe und zweimal differenzierbare Funktion ist.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega \psi(u(x,t)) \ dx &= \int_\Omega \partial_t u(x,t)\psi'(u(x,t)) \ dx = \int_\Omega \Delta u(x,t)\psi'(u(x,t)) \ dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \underbrace{\partial_n u(x,t)}_{=0} \psi'(u(x,t)) \ d\sigma - \int_\Omega \nabla u(x,t) \cdot (\nabla\psi'(u(x,t))) \ dx \\ &= -\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 \psi''(u(x,t)) \ dx < 0. \end{aligned}$$

Ist ψ strikt konvex, d.h. ψ'' sogar gleichmässig von Null weg beschränkt, dann erhält man eine Energiedissipationseigenschaft der Form

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \psi(u(x,t))\ dx \le -C\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\ dx$$

mit $C > 0$ die untere Schranke für ψ''.

Einsicht in das Langzeitverhalten des Neumann-Problems kann man unter anderem mit der Wahl

$$\psi(u) = (u - \overline{u_0})^2, \qquad \overline{u_0} = \fint_\Omega u_0(x)\ dx$$

gewinnen. Es folgt aus der obigen Rechnung ($\psi'' \equiv 2$)

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u(x,t) - \overline{u_0})^2\ dx = -2\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\ dx = -2\int_\Omega |\nabla(u(x,t) - u_0)|^2\ dx.$$

Um nun genauere Aussagen zu erhalten, müssen wir auf der rechten Seite das Integral des Gradienten noch durch die ursprüngliche Entropie abschätzen. Dies liefert die sogenannte Poincare-Ungleichung (die wir aber erst später beweisen werden:

Satz 2.15 (Poincare-Ungleichung). *Sei $v \in C^1(\Omega)$ mit $\fint_\Omega v(x)\ dx = 0$. Dann gilt*

$$\int_\Omega v(x)^2\ dx \le c\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\ dx$$

mit einer Konstante $c > 0$ unabhängig von v.

Es gilt also mit $\lambda := \frac{1}{c}$:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u(x,t) - \overline{u_0})^2\ dx \le -2\lambda\int_\Omega (u(x,t) - \overline{u_0})^2\ dx$$

und mit der Gronwall-Ungleichung erhalten wir daraus

$$\int_\Omega (u(x,t) - \overline{u_0})^2\ dx \le e^{-2\lambda t}\int_\Omega (u_0(x) - \overline{u_0})^2\ dx.$$

Damit konvergiert u exponentiell schnell gegen den Mittelwert von u_0 in der L^2-norm

$$\|u(t) - \overline{u_0}\|_{L^2} \le e^{-\lambda t}\ \|u_0 - \overline{u_0}\|_{L^2}.$$

2.4 Wellengleichung

Wir betrachten im Folgenden die Wellengleichung

$$\partial_{tt}u = \Delta u \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \tag{2.58}$$

nun mit zwei Anfangswerten

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \partial_t u(x,0) = v_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.59}$$

Die Ausbreitung von Wellen unterscheidet sich in verschiedenen Raumdimensionen, weshalb auch die mathematische Analyse dimensionsabhängig ist und in den folgenden Abschnitten untersucht werden soll.

2.4.1 Die Eindimensionale Wellengleichung

In einer Raumdimension gibt es nur zwei mögliche Ausbreitungsrichtungen für eine Welle (nach links oder rechts), und die Wellengleichung kann deshalb auf zwei Transportgleichung zurückgeführt werden. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} v &:= \partial_t u - \partial_x u \\ w &:= \partial_t u + \partial_x u. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_t v &= \partial_{tt} u - \partial_{tx} u \\ &= \partial_{xx} u - \partial_{xt} u = -\partial_x v \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_t w &= \partial_{tt} u + \partial_{tx} u \\ &= \partial_{xx} u + \partial_{xt} u = \partial_x w. \end{aligned}$$

Wir können v und w also mit der Charakteristiken-Methode berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} v(x,t) &= v(x-t,0) \\ w(x,t) &= w(x+t,0). \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch die passenden Anfangswerte für v und w einsetzen. Wegen $\partial_t u(x,0) = v_0(x)$ und $\partial_x u(x,0) = \partial_x u_0$ folgt.

$$\begin{aligned} v(x,t) &= v_0(x-t) - \partial_x u_0(x-t) \\ w(x,t) &= v_0(x+t) + \partial_x u_0(x+t). \end{aligned}$$

Aus der ursprünglichen Definition von v und w folgern wir

$$\partial_t u(x,t) = \frac{1}{2}(v(x,t) + w(x,t)) = \frac{1}{2}(v_0(x-t) + v_0(x+t) + u_0'(x+t) - u_0'(x-t)).$$

Integrieren wir noch bezüglich der Zeit, dann folgt

$$u(x,t) = c(x) + \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2}\int_0^t (v_0(x-s) + v_0(x+s))\, ds.$$

Die (noch von x abhängige Integrationskonstante c können wir aus der Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ bestimmen, und wir erhalten die Lösungsformel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2}\int_0^t (v_0(x-s) + v_0(x+s))\, ds. \tag{2.60}$$

für die Wellengleichung.

Aus der genaueren Inspektion der Regularitätsvoraussetzungen für die obige Herleitung erhalten wir:

Satz 2.16. *Sei $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $v_0 \in C^2(\mathbb{R})$, dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,T))$ der Wellengleichung* (2.58) *mit Anfangsbedingung* (2.59) *für $n = 1$, gegeben durch* (2.60).

Wir sehen, dass sich die Lösung $u(x,t)$ für $v_0 \equiv 0$ aus dem sphärischen Mittelwert von u_0 über einer wachsenden eindimensionalen Sphäre von Radius t um x ergibt. Daraus sehen wir, dass der Abhängigkeitsbereich des Punktes x der Kegel

$$C(x,t) = \{\ (y,s) \in \mathbb{R} \times [0,t] \mid |y-x| \le t-s\ \}$$

ist. Sphärische Mittelwerte spielen auch in höheren Dimensionen eine wichtige Rolle bei der Lösung der Wellengleichung.

2.4.2 Sphärische Mittelwerte in Höheren Dimensionen

Für $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig und fix definieren wir den sphärischen Mittelwert

$$U(r,t;x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y,t)\ d\sigma(y), \tag{2.61}$$

und analog für die Anfangsdaten

$$U_0(r;x) = \fint_{\partial B_r(x)} u_0(y)\ d\sigma(y), \quad V_0(r;x) = \fint_{\partial B_r(x)} v_0(y)\ d\sigma(y). \tag{2.62}$$

Die sphärischen Mittel (als Funktion von r und t) erfüllen eine eindimensionale Wellengleichung in radialen Koordinaten:

Lemma 2.17 (Euler-Poisson-Darboux Gleichung). *Sei $n \ge 2$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ eine Lösung von* (2.58), (2.59)*. Dann erfüllt $U \in C^2(\mathbb{R}^+ \times (0,T))$ definiert durch* (2.61)

$$\partial_{tt} U = \partial_{rr} U + \frac{n-1}{r} \partial_r U = \frac{1}{r^{n-1}} \partial_r (r^{n-1} \partial_r U) \qquad \text{in } \mathbb{R}^+ \times (0,T) \tag{2.63}$$

und

$$U(r,0;x) = U_0(r;x), \qquad \partial_t U(r,0;x) = V_0(x;r). \tag{2.64}$$

Beweis. Analog zum Beweis der Mittelwerteigenschaft für die Poisson-Gleichung zeigen wir

$$\partial_r U = \frac{r}{n} \fint_{B_r(x)} \Delta u(y,t)\ dy.$$

Durch erneutes Differenzieren und eine ähnliche Rechnung erhält man

$$\partial_{rr} U = \fint_{\partial B_r(x)} \Delta u(y,t)\ dy + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \fint_{B_r(x)} \Delta u(y,t)\ dy.$$

Daraus sehen wir

$$\partial_{rr} U + \frac{n-1}{r} \partial_r U = \fint_{\partial B_r(x)} \Delta u(y,t)\ dy = \fint_{\partial B_r(x)} \partial_{tt} u(y,t)\ dy = \partial_{tt} U. \qquad \square$$

Die Euler-Poisson-Darboux Gleichung ist die Grundlage für die Herleitung von Lösungsdarstellungen der mehrdimensionalen Wellengleichung. Im Fall $n = 3$ kann man mit dem Ansatz $\tilde{U} := rU$ (2.63) auf die eindimensionale Wellengleichung zurückführen und mit der Lösung aus dem vorigen Abschnitt erhält man die *Kirchhoff'sche Formel*

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} [t v_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y-x)]\ d\sigma(y), \qquad x \in \mathbb{R}^3, t \in (0,T). \tag{2.65}$$

Durch Dimensionsreduktion erhält man dann für $n = 2$ die Poisson-Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{t^2 v_0(y) + t u_0(y) + t \nabla u_0(y) \cdot (y - x)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} \, d\sigma(y), \qquad x \in \mathbb{R}^2, t \in (0,T). \quad (2.66)$$

Man erkennt einen wesentlichen Unterschied zwischen den ungeraden Dimensionen $n = 1$ und $n = 3$, sowie der geraden Dimension $n = 2$, der auch für allgemeines n besteht. In ungeraden Dimensionen hängt der Wert der Lösung wirklich nur von Mittelwerten der Anfangswerte über Sphären mit Radius t ab, während in geraden Dimensionen Mittelwerte über ganze Kugeln berechnet werden muss - der Einflussbereich eines Punkts auf die Wellenfortpflanzung ist also völlig unterschiedlich.

2.4.3 Eigenschaften der Lösung

Im Gegensatz zur Wärmeleitungsgleichung erfüllt die Wellengleichung kein Maximumprinzip, in der Natur einer Welle liegt klarerweise auch das Auftreten von Maxima und Minima im Inneren. Ausserdem erhält man keine innere Regularität, wie schon aus der Lösungsformel (2.60) im eindimensionalen sichtbar wird. Die Lösung für Zeit $t > 0$ ist genauso oft differenzierbar wie der Anfangswert u_0.

Statt der Energiedissipation erhält man eine Erhaltungseigenschaft, bestehend aus einer Gesamtenergie und kinetischer Energie

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [(\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2] \, dx. \quad (2.67)$$

Für die Zeitableitung von E folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u(t)) &= \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t u \partial_{tt} u + \nabla u \cdot \nabla \partial_t u] \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u [\partial_{tt} u - \Delta u] \, dx = 0. \end{aligned}$$

In der obigen Form konvergiert die Lösung der Wellengleichung (2.58) für $t \to \infty$ auch nicht gegen eine stationäre Lösung. Dies passiert nur mit zusätzlicher Dämpfung (physikalisch z.B. Reibung) der Form

$$\partial_{tt} u + \delta \partial_t u = \Delta u.$$

Interessant sind für (2.58) sogenannte zeitharmonische Lösungen der Form

$$u(x,t) = e^{ik \cdot x} U(x),$$

wobei $k \in \mathbb{R}^n$ der sogenannte Wellenvektor ($|k|$ die Wellenzahl) ist. Dies sind nach der Euler'schen Formel also genau die Grundschwingungen (Sinus und Cosinus). Durch Einsetzen sieht man, dass U die *Helmholtz-Gleichung*

$$\Delta U + |k|^2 U = 0 \quad (2.68)$$

erfüllt. Die Helmholtz-Gleichung hat zwar eine ähnliche Gestalt wie die Poisson-Gleichung, der Term $|k|^2 U$ ändert aber die Eigenschaften grundlegend. Unter anderem werden das Maximumprinzip und die mögliche Eindeutigkeit der Lösung zerstört. Mit der Notation $\lambda = |k|^2$ kann man die Helmholtz-Gleichung

$$-\Delta U = \lambda U$$

auch als Eigenwertproblem für den Laplace-Operator interpretieren.

2.4.4 Energiemethoden

Wie oben schon angedeutet haben Energiemethoden für die Wellengleichung geringere Bedeutung als für Poisson- und Wärmeleitungsgleichung. Allerdings kann man Energiemethoden immer noch verwenden um Eindeutigkeit zu beweisen. Wir betrachten dazu (2.58) mit homogenen Anfangswerten

$$u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0.$$

Nun multiplizieren wir nicht mit der Lösung u, sondern mit $\partial_t u$ und integrieren über $\mathbb{R}^n$. Nach partieller Integration folgt analog zur Energieerhaltung

$$0 = \frac{d}{dt} E(u(t)).$$

Mit homogenen Anfangswerten ist aber $E(u(0)) = 0$ und damit

$$0 = E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [(\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2] \; dx,$$

woraus $\partial_t u \equiv 0$ und $\nabla u \equiv 0$ folgt. Also ist u konstant und wegen $u(.,0) \equiv 0$ muss $u \equiv 0$ gelten.

Ähnlich zur Transportgleichung können wir für die Wellengleichung auch endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit folgern. Im Fall der Wärmeleitungsgleichung folgt, dass die Lösung für $t > 0$ sofort in ganz $\mathbb{R}^n$ positiv ist, falls u auch nur in einer beschränkten Menge positiv ist und ausserhalb verschwindet. Bei der Wellengleichung passiert die Ausbreitung nur auf einem linear in der Zeit anwachsenden Kegel. Wir nehmen dazu an, dass

$$u_0(x) = 0, \quad v_0(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus B_R(0) \tag{2.69}$$

gilt und zeigen, dass dann

$$u(x,t) = 0, \quad \partial_t u(x,t) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{R+t}(0) \tag{2.70}$$

gilt.

Nun definieren wir

$$e(t) := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R+t}(0)} [|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2] \; dx.$$

Mit der Transformation $y = \frac{R}{R+t} x$ erhalten wir ein Integral auf einem fixen Gebiet

$$e(t) = \frac{R+t}{R} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} [|\partial_t u(\frac{R+t}{R} y, t)|^2 + |\nabla u(\frac{R+t}{R} y, t)|^2] \; dy,$$

das wir leichter nach t differenzieren können. Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt}(t) \quad &= \quad \frac{1}{R+t} e(t) + 2\frac{R+t}{R} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \partial_t u(\frac{R+t}{R} y, t) \nabla \partial_t u(\frac{R+t}{R} y, t) \cdot \frac{y}{R} \; dy + \\
&\quad 2\frac{R+t}{R} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \nabla u(\frac{R+t}{R} y, t) \cdot (D_x^2 u(\frac{R+t}{R} y, t) \frac{y}{R}) \; dy + \\
&\quad 2\frac{R+t}{R} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \partial_t u(\frac{R+t}{R} y, t) \partial_{tt} u(\frac{R+t}{R} y, t) \; dy + \\
&\quad 2\frac{R+t}{R} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \nabla u(\frac{R+t}{R} y, t) \cdot \nabla \partial_t u(\frac{R+t}{R} y, t) \; dy
\end{aligned}$$

Nach Rücktransformation zu x und partieller Integration folgt weiter

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt}(t) &= \frac{1}{R+t}e(t) + \frac{R+t}{R}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R+t}(0)} \nabla[|\partial_t u(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2]\cdot\frac{x}{R+t}\ dx + \\
& \quad 2\frac{R+t}{R}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R+t}(0)} [\partial_t u(x,t)\partial_{tt}u(x,t) + \nabla u(x,t)\cdot\nabla\partial_t u(x,t)]\ dx \\
&= \frac{1}{R+t}e(t) - \frac{1}{R}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R+t}(0)} [|\partial_t u(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2]\ dx - \\
& \quad 2\frac{R+t}{R}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R+t}(0)} \partial_t u(x,t)[\partial_{tt}u(x,t) - \Delta u(x,t)]\ dx - \\
& \quad \int_{\partial B_{R+t}(0)} [|\partial_t u(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2] n(x)\cdot\frac{x}{R+t}\ d\sigma - \\
& \quad 2\int_{\partial B_{R+t}(0)} [\partial_t u(x,t)\nabla u(x,t)\cdot n(x)\ d\sigma
\end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass sich die ersten beiden Terme wegkürzen und der dritte wegen (2.58) verschwindet. Beim ersten Volumsintegral ist zu beachten, dass $n(x) = \frac{x}{R+t}$ gilt und somit $n(x)\cdot\frac{x}{R+t} = 1$ gilt. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt}(t) &= -\int_{\partial B_{R+t}(0)} [|\partial_t u(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2 + 2\partial_t u(x,t)\nabla u(x,t)\cdot n(x)]\ d\sigma \\
&\leq -\int_{\partial B_{R+t}(0)} [|\partial_t u(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2 - 2|\partial_t u(x,t)||\nabla u(x,t)|]\ d\sigma \\
&= -\int_{\partial B_{R+t}(0)} (|\partial_t u(x,t)| - |\nabla u(x,t)|)^2\ d\sigma \leq 0.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$e(t) = e(0) + \int_0^t \frac{de}{dt}(s)\ ds \leq 0$$

und damit ist $\partial_t u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_{R+t}(0)$ und wegen $u_0 \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_{R+t}(0)$ folgt auch $u \equiv 0$.