Kapitel 1

Einleitung

Partielle Differentialgleichungen sind heute eines der wesentlichsten Mittel bei der mathematischen Beschreibung realer Prozesse, die in verschiedensten Anwendungsfeldern zum Einsatz kommen. Auch mathematisch bieten partielle Differentialgleichungen äusserst interessante Strukturen, mit vielen Verbindungen zu anderen Feldern wie Analysis, Funktionalanalysis, Differentialgeometrie, Stochastik und natürlich Numerik.

Diese Vorlesung soll einen ersten Einblick in die Theorie partieller Differentialgleichungen (engl. partial differential equations, PDE) geben. Im Herangehen und auch vielen inhaltlichen Fragen folgt die Vorlesung dem Buch von Evans [1], das wohl zurecht von vielen als das modernste zum Thema gilt. Insbesondere werden wir uns auch mit nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen beschäftigen. Wir konzentrieren uns in dieser Vorlesung auf die Analysis von Anfangs- und Randwertproblemen für PDEs, einige andere wichtige Aspekte werden in parallelen oder weiterführenden Vorlesungen behandelt:

- Herleitung von partiellen Differentialgleichungen als Modell für reale Prozesse (Mathematische Modellierung).
- Numerische Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen (Numerik Partieller Differentialgleichungen 1 und 2).
- Inverse und schlecht gestellte Probleme bei partiellen Differentialgleichungen (Inverse Probleme)
- Optimale Kontrolle bei Partiellen Differentialgleichungen
- Anwendungen partieller Differentialgleichungen in der Bildverarbeitung (Mathematische Bildverarbeitung)
- Weiterführende Themen (Seminare, Praktika)

1.1 Grundlegendes

Wir betrachten in dieser Vorlesung partielle Differentialgleichungen, d.h. Gleichungen in denen wir Funktionen als Unbekannte suchen und natürlich auch partielle Ableitungen dieser Funktion vorkommen. Bezeichnen wir mit $D^k u$ die Sammlung der k-ten Ableitungen, d.h.

$$D^k u = \{ \ \partial_{x_1}^{k_1} \partial_{x_2}^{k_2} \dots \partial_{x_n}^{k_n} u \mid \sum k_j = k \ \}. \tag{1.1}$$

Für Ausdrücke der obigen Form werden wir eine Multiindex-Notation verwenden, d.h.

$$D^\alpha u := \partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\dots\partial_{x_n}^{k_n} u, \quad \alpha = (k_1, k_2, \dots, k_n). \tag{1.2}$$

Für den Multiindex benutzen wir weiter den Betrag, d.h. seine ℓ^1-norm $|\alpha| := \sum k_j$.

Damit können wir auch gleich den wesentlichsten Begriff, dem der *partiellen Differentialgleichung* klären:

Definition 1.1. Sei $k \in \mathbb{N}$,

$$F : \mathcal{D}(F) \subset \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist. Eine Relation der Form

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \qquad (x \in U), \tag{1.4}$$

in der die Funktion $u : U \to \mathbb{R}$ die Unbekannte ist, heisst partielle Differentialgleichung der Ordnung k, wenn F nicht konstant von $D^k u$ abhängt.

Wie bei jeder Gleichung kann man auch partielle Differentialgleichungen in lineare und nichtlineare unterteilen. In diesem Fall ist die mögliche Unterteilung aber noch ein bisschen feiner, auch daran

Definition 1.2. Die partielle Differentialgleichung (1.4) heisst

- *linear*, wenn F von allen Variablen ausser x affin-linear abhängt, d.h. F hat die Form

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + f(x). \tag{1.5}$$

- *semilinear*, wenn F aus einem linearen Anteil in den höchsten Ableitungen plus einem nichtlinearen Anteil in den niedrigeren Ableitungen besteht, d.h.

$$\begin{aligned} &F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = \\ &\quad \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + G(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) \end{aligned} \tag{1.6}$$

- *quasilinear*, wenn F affin-linearen Anteil von D^k abhängt, d.h.

$$\begin{aligned} &F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = \\ &\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) D^\alpha u(x) + G(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) \end{aligned} \tag{1.7}$$

- *voll nichtlinear*, wenn F wirklich nichtlinear von $D^k u$ abhängt.

1.1.1 Notation

Zu Beginn werden wir einige grundlegende Notationen klären und die wesentlichen Differentialoperatoren einführen.

Grundsätzlich werden wir Funktionen von $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ betrachten, die wir mit u bezeichnen. In manchen Fällen werden wir zusätzlich u als Funktion einer Zeitvariable $t \in \mathbb{R}^+$ betrachten.

Partielle Ableitungen bezeichnen wir mit ∂_{x_i} bezüglich ∂_t, die gesammten Ableitungen wie oben mit D^k. Die erste Ortsableitung bezeichnen wir als Gradient, d.h.

$$\nabla u = (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u). \tag{1.8}$$

Weiters bezeichnen wir die *Divergenz* eines Vektorfelds als

$$\nabla \cdot V = \partial_{x_1} V_1 + \ldots + \partial_{x_n} V_n. \tag{1.9}$$

Die Hintereinanderausführung von Divergenz und Gradient bezeichnen wir mit dem Laplace-Operator

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \partial_{x_1 x_1} u + \ldots + \partial_{x_n x_n} u. \tag{1.10}$$

Für Randbedingungen werden wir auch noch eine Normalableitung benötigen. Sei n der Aussennormalvektor am Rand eines Gebiets Ω, dann verwenden wir die Notation

$$\partial_n u = \nabla u \cdot n \qquad \text{auf } \partial\Omega. \tag{1.11}$$

Wir werden immer voraussetzen, dass Ω offen ist, denn Abschluss bezeichnen wir als $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

1.1.2 Funktionenräume

Da wir als Lösungen von PDEs Funktionen suchen, benötigen wir Funktionsräume in denen wir diese suchen. Die Grundlegendsten wollen wir hier kurz definieren. Dazu sei im Folgenden $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet.

Den Raum der Funktionen stetiger Funktionen bezeichnen wir als

$$C(\Omega) = \{\ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid u \text{ ist stetig auf } \overline{\Omega}\ \}, \tag{1.12}$$

und betrachten ihn als Banach-Raum mit der Supremums-Norm

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Rekursiv definieren wir dann die k-mal stetig differenzierbaren Funktionen als

$$C^k(\Omega) = \{\ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \partial_{x_i} u \in C^{k-1}(\Omega), i = 1, \ldots, n\ \}, \tag{1.13}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{C^k} = \max\{\|u\|_{C^{k-1}}, \max\{\|\partial^\alpha u\|_\infty \mid |\alpha| = k\}\}, \tag{1.14}$$

Im Fall eines unbeschränkten Gebiets definieren wir

$$C_b(\mathbb{R}^n) = \{\ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid u \text{ ist stetig und beschränkt auf } \mathbb{R}^n\ \}, \tag{1.15}$$

wieder mit der Supremumsnorm. Analog definieren wir $C_b^k(\mathbb{R}^n)$.

Ein weiterer wichtiger Raum als Grundlage für viele Ansätze ist

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid u \text{ ist unendlich oft differenzierbar und hat kompakten Träger in } \Omega\ \}. \tag{1.16}$$

In diesem Raum muss man sich über Differenzierbarkeit keine Sorgen machen, andererseits ist $C_0^\infty(\Omega)$ in vielen Räumen dicht, sodass dieser Raum eine gute Grundlage ist.

Neben stetigen Funktionen sind mess- und integrierbare Funktionen interessant, für die wir die Lebesgue-Räume L^p verwenden:

$$L^p(\Omega) = \{\ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ messbar } \mid \int_\Omega |u|^p dx < \infty\ \}, \tag{1.17}$$

für $1 \leq p < \infty$ mit der Norm

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{1/p}. \tag{1.18}$$

Im Fall $p = \infty$ haben wir

$$L^\infty(\Omega) = \{\ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ messbar } \mid \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty\ \}, \tag{1.19}$$

mit der (essentiellen) Supremumsnorm

$$\|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf_{N \text{Nullmenge}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |u(x)| \tag{1.20}$$

Völlig analog können wir vektorwertige Funktionenräume, d.h. für Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ oder sogar $u : \Omega \to X$, wobei X ein Banachraum ist, definieren. Da $u(x)$ dann keine reelle Zahl sondern ein Element eines Banachraumes ist, wird einfach in allen Definitionen der Betrag durch $\|u(x)\|_X$ ersetzt. Die Notation für solche Räume ist dann $C^k(\Omega; X)$ bzw. $L^p(\Omega; X)$.

1.1.3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bevor wir uns nun wirklich mit partiellen Differentialgleichungen beschäftigen, wollen wir noch kurz einige nützliche Resultate zu gewöhnlichen Differentialgleichungen wiederholen, die wir auch im Verlauf der Vorlesung noch brauchen werden.

Der einfachste Fall sind separable skalare Differentialgleichungen erster Ordnung. D.h. wir suchen eine Funktion $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die

$$u'(t) = p(u(t))q(t), \qquad u(0) = u_0 \tag{1.21}$$

erfüllt, wobei p und q gegebene stetige Funktionen sind. Ist $p(u_0) \neq 0$, so können wir zumindest in einer Umgebung von $t = 0$ eine stetige Lösung mit $p(u(t)) \neq 0$ finden und es gilt

$$\frac{u'(t)}{p(u(t))} = q(t).$$

Diese Identität können wir bezüglich t integrieren, und mit einer Integraltransformation auf der linken Seite folgt

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{p(v)}\ dv = \int_0^s \frac{u'(t)}{p(u(t))}\ dt = \int_0^s q(t)\ dt.$$

Ist also P eine Stammfunktion von $\frac{1}{p}$, so folgt

$$P(u(t)) - P(u_0) = \int_0^s q(t)\ dt,$$

bzw.

$$u(t) = P^{-1}(P(u_0) - \int_0^s q(t)\ dt). \tag{1.22}$$

Man beachte dabei, dass die inverse Funktion von P zumindest lokal um u_0 existiert, da die Ableitung existiert und von Null verschieden ist.

Erweiterungen skalarer Gleichungen erster Ordnung sind Gleichungen höherer Ordnung bzw. Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Da man höhere Ableitung durch Einführung zusätzlicher Variable (die verschiedenen Ableitungen) und Gleichungen immer auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung überführen kann, betrachten wir im Folgenden solche Systeme. Diese sind allgemein von der Form

$$U'(t) = F(t, U(t)), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1.23}$$

wobei $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$ und $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ gilt. Die Existenz eines solchen Problems ist gegeben, wenn F stetig ist:

Satz 1.3 (Peano). *Sei F stetig in einer Umgebung von $(0, U(0))$. Dann gibt es ein Intervall $[0, t_0)$ und eine in diesem Intervall stetige (vektorwertige) Funktion U, die (1.23) erfüllt.*

Der Beweis des Satzes von Peano benutzt den Schauder'schen Fixpunktsatz, wir werden ihn hier nicht näher diskutieren, bemerken nur dass die Fixpunktformulierung auf der äquivalenten Integralgleichung

$$U(t) = U(0) + \int_0^t F(s, U(s))\ ds.$$

Noch wichtiger ist der Satz von Picard-Lindelöf, der unter stärkeren Annahmen an F auch Eindeutigkeit garantiert.

Satz 1.4 (Picard-Lindelöf). *Sei F stetig in einer Umgebung von $(0, U(0))$ und F erfülle eine Lipschitz-Bedingung bezüglich der zweiten Variable, d.h.*

$$\|F(t, U_1) - F(t, U_2)\| \leq L\|U_1 - U_2\|.$$

Dann gibt es ein Intervall $[0, t_0)$ und eine in diesem Intervall eindeutige stetige (vektorwertige) Funktion U, die (1.23) erfüllt.

Auch der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf basiert auf der Fixpunktformulierung mit Integraloperator, in diesem Fall wird Kontraktivität verwendet, die sich aus der Lipschitz-Konstante und der Kleinheit des Zeitintervalls ergibt.

Ist F linear mit konstanten Koeffizienten, d.h. $F(t, U) = \mathbf{A}U$ mit einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, dann kann die eindeutige Lösung als

$$U(t) = e^{\mathbf{A}t}U(0) \tag{1.24}$$

berechnet werden. Dabei ist $e^{\mathbf{A}t}$ eine $m \times m$ Matrix, die über Spektraltheorie definiert werden muss. Dies ist besonders einfach, wenn $\mathbf{A}$ m verschiedene Eigenvektoren λ_i mit zugehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren U_i hat. Dann gilt

$$U(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{\lambda_i t} U_i \tag{1.25}$$

Ein wichtiges Resultat für die Anwendung auf partielle Differentialgleichungen ist die *Gronwall-Ungleichung*, die oft bei der Analyse von Ortsintegralen der Lösung (im Verlauf der Zeit) nützlich ist. Die grobe Form der Gronwall-Ungleichung ist

$$u'(t) \leq Cu(t) \quad \Rightarrow u(t) \leq u(0)e^{Ct}.$$

D.h. man kann eine Funktion, die eine Differentialungleichung erfüllt, durch die entsprechende Lösung der Differentialgleichung abschätzen. Präziser kann die Ungleichung über eine Integralungleichung angegeben werden :

Lemma 1.5 (Gronwall Ungleichung). *Seien $A, C \in \mathbb{R}$ und $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die*

$$u(t) \leq A + C \int_0^t u(s)\, ds, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.26}$$

erfüllt. Dann gilt

$$u(t) \leq Ae^{Ct}. \tag{1.27}$$

Beweis. Sei $v(t) := \int_0^t u(s)\, ds$, dann gilt

$$v(0) = 0, \qquad v'(t) \leq A + Cv(t).$$

Weiters sei $w(t) := e^{-Ct}v(t)$, und es folgt $w'(t) \leq Ae^{-Ct}$ und wegen $w(0) = 0$ auch

$$w(t) \leq \frac{A}{C}(1 - e^{-Ct}) \quad \Rightarrow \quad v(t) \leq \frac{A}{C}(e^{Ct} - 1).$$

Einsetzen von v in (1.26) liefert (1.27). □.

1.2 Beispiele Partieller Differentialgleichungen

Im folgenden präsentieren wir eine Auswahl wichtiger Beispiele partieller Differentialgleichungen, um ein erstes Gefühl für typische Formen auftretender Gleichungen zu bekommen:

Transportgleichung:

$$\partial_t u + b \cdot \nabla u = 0 \tag{1.28}$$

Laplace-Gleichung:

$$\Delta u = 0 \tag{1.29}$$

Poisson-Gleichung:

$$-\Delta u = f \tag{1.30}$$

Wärmeleitungsgleichung / Diffusionsgleichung:

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \tag{1.31}$$

Wellengleichung:

$$\partial_{tt}u - \Delta u = 0 \tag{1.32}$$

Fokker-Planck Gleichung:

$$\partial_t u - \nabla \cdot (a(\nabla u - u\nabla V)) = 0 \tag{1.33}$$

Schrödinger Gleichung:

$$-i\epsilon\partial_t u - \epsilon^2\Delta u + Vu = 0 \tag{1.34}$$

Liouville-Gleichung:

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{N} v_j \cdot \nabla_{x_j} u + \sum_{j=1}^{N} F(x_j) \cdot \nabla_{v_j} u = 0 \tag{1.35}$$

Boltzmann-Gleichung:

$$\partial_t u + v \cdot \nabla_x u + F(x) \cdot \nabla_v u = Q(u, u) \tag{1.36}$$

Vlasov-Gleichung:

$$\partial_t u + v \cdot \nabla_x u + \int \nabla g(x-y)u(y, v, t)dy \cdot \nabla_v u = 0 \tag{1.37}$$

Hamilton-Jacobi Gleichung

$$\partial_t u + H(x, t, \nabla u) = 0 \tag{1.38}$$

Eikonal-Gleichung

$$|\nabla u| = 1 \tag{1.39}$$

Skalare Erhaltungsgleichung:

$$\partial_t u + \nabla \cdot (F(u)) = 0 \tag{1.40}$$

Burgers-Gleichung:

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0 \tag{1.41}$$

Reaktions-Diffusionsgleichung:

$$\partial_t u - \Delta u + f(u) = 0 \tag{1.42}$$

Biharmonische Gleichung:

$$\Delta\Delta u = 0 \tag{1.43}$$

p-Laplace Gleichung:

$$\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \tag{1.44}$$

Monge-Ampere Gleichung:

$$\det\,(D^2 u) = f \tag{1.45}$$

Porous-Medium Gleichung:

$$\partial_t u - \nabla \cdot (u^\gamma \nabla u) = 0 \tag{1.46}$$

(Level Set) Mittlere Krümmungs Gleichung:

$$\partial_t u - |\nabla u| \nabla \cdot (\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) = 0 \tag{1.47}$$

Total Variation Flow:

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) = 0 \tag{1.48}$$

Dazu noch einige wichtige Systeme

Lame-Gleichungen der linearen Elastizität:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \tag{1.49}$$

Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{E} - \ \text{curl}\ \mathbf{B} &= 0 && (1.50)\\ \partial_t \mathbf{B} + \ \text{curl}\ \mathbf{E} &= 0 && (1.51)\\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 && (1.52) \end{aligned}$$

Stokes-System:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} - \nabla p &= f && (1.53)\\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && (1.54) \end{aligned}$$

Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} - \nabla p &= 0 && (1.55)\\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && (1.56) \end{aligned}$$

Poisson-Nernst-Planck Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\Delta V - \sum_i z_i u_i &= f && (1.57)\\ \partial_t u_i - \Delta u_i - \nabla \cdot (z_i u_i \nabla V) &= 0 && (1.58) \end{aligned}$$

Patlak-Keller-Segel Modell:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla S) &= 0 && (1.59)\\ \partial_t S - \Delta S - g(u, S) & && (1.60) \end{aligned}$$

Kardiales Bidomain Modell:

$$\begin{aligned} \partial_t s - F(s, v) &= 0 && (1.61)\\ \partial_t v + I(s, v) - \nabla \cdot (M_i \nabla v) - \nabla \cdot (M_i \nabla u_e) &= 0 && (1.62)\\ \nabla \cdot (M_i \nabla v) + \nabla \cdot ((M_i + M_e) \nabla u_e) &= 0 && (1.63) \end{aligned}$$

1.3 Partielle Differentialgleichungen: Wie und Was ?

Im Laufe der Vorlesung werden wir verschiedene Herangehensweisen an partielle Differentialgleichungen und verschiedenste Fragestellungen kennen lernen. Einige Grundansätze wollen wir im Folgenden kurz andiskutieren.

Die erste Frage, die wir an jede Gleichung stellen ist jene nach der Korrektgestelltheit (well-posedness). Nach Hadamard ist ein Problem korrekt gestellt, wenn eine Lösung existiert, eindeutig ist, und stetig von den Daten abhängt. Dafür ist es oft nötig die korrekte Art einer Lösung zu definieren. Die einfachste Möglichkeit dabei sind *klassische Lösungen*, d.h. k-mal differenzierbare Funktionen die tatsächlich eingesetzt in (1.4) die Gleichung punktweise erfüllen. In vielen Fällen, vor allem bei nichtlinearen PDE, ist es nicht möglich klassische Lösungen zu finden. Es ist dann nötig allgemeinere Lösungskonzepte, *schwache Lösungen*, zu definieren. Einige solcher Konzepte werden wir noch näher diskutieren.

Neben der grundlegenden Fragestellung der Existenz und Eindeutigkeit sind noch einige weitere Untersuchungen zur Lösung interessant, falls möglich:

- Die Berechnung expliziter Lösungen.
- Lösungsformeln, z.B. als Integraldarstellungen.
- Symmetrieeigenschaften der Gleichung bzw. der Lösung.
- Lokale Eigenschaften von Lösungen, z.B. Charakteristiken oder Maximumprinzipien.
- Globale Eigenschaften von Lösungen, z.B. Schranken an gewisse Integrale der Lösung.
- Asymptotische Eigenschaften von Lösungen bei Konvergenz eines Parameters gegen Null oder der Zeitvariable gegen Unendlich.