Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 9, Abgabe bis 18.12.2008, 8:30

Montag 10-12 (Briefkasten 83), Montag 12-14 (Briefkasten 85), Dienstag 12-14 (Briefkasten 89)

1. *Grundlösung der Laplace-Gleichung im distributionellen Sinne*
   Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit $0 \in \Omega$. Zeigen Sie, dass die Grundlösung Φ der Laplace-Gleichung im distributionellen Sinne
   $$-\Delta\Phi = \delta_0 \qquad \text{in} \;\; \Omega$$
   mit δ_0 die Dirac δ-Distribution zentriert bei 0 erfüllt.

2. *Einbettungssatz für Soboleväume*
   Sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann folgende stetige Einbettung gilt:
   $$H^1(a,b) \subset C[a,b]$$
   Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Arzelà-Ascoli.

3. *Einbettung von Sobolev- in Lebesgueräume*
   Sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann folgende stetige Einbettung gilt:
   $$W^{1,1}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ , \qquad 1 \le q < \infty\ .$$
   Hinweis: Gehen Sie ähnlich zum Beweis des Spursatzes auf dem Einheitskreis vor.

4. *Poincare- und Friedrichs-Ungleichung*
   Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\Gamma = \partial\Omega$ und $1 \le p < \infty$. Beweisen Sie:
   (a) Poincare-Ungleichung
   $$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \le C \left(|\int_\Omega u\ dx|^p + |u|_{1,p}^p \right)^{1/p}\ , \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$
   (b) Friedrichs-Ungleichung
   $$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \le C \left(\int_\Gamma |u|^p\ d\sigma(x) + |u|_{1,p}^p \right)^{1/p}\ , \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$