

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 8, Abgabe bis 11.12.2008, 8:30

Montag 10-12 (Briefkasten 83), Montag 12-14 (Briefkasten 85), Dienstag 12-14 (Briefkasten 89)

1. Distributionelle Ableitung

Berechnen Sie die distributionelle Ableitung von

(a)

$$u(x) = |x|, \quad x \in (-1, 1),$$

(b)

$$H(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & -1 < x < 0 \end{cases}.$$

2. Rechnen mit Distributionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $0 \in \Omega$. Zeigen Sie:

(a)

$$\operatorname{div} \frac{x}{|x|^2} = 2\pi\delta_0$$

mit der Dirac'schen δ -Distribution δ_0 zentriert bei 0,

(b)

$$\operatorname{div} \frac{x^\perp}{|x|^2} = 0, \quad x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Beachten Sie in (a), dass $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log|x|$ die Grundlösung der Laplace-Gleichung in \mathbb{R}^2 ist.

3. Sobolev-Räume I

Sei $\Omega = B_R(0)$ die offene Kugel in \mathbb{R}^2 mit $R < 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x) = (-\log|x|)^k, \quad k < \frac{1}{2},$$

nicht stetig in Ω ist, aber $u \in H^1(\Omega)$ gilt.

4. Sobolev-Räume II

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Gebiet und $u, v \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass das Produkt uv auch in $H^1(\Omega)$ ist.

Hinweis: Es gilt folgende stetige Einbettung

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega).$$