Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 7, Abgabe bis 04.12.2008, 8:30

Montag 10-12 (Briefkasten 83), Montag 12-14 (Briefkasten 85), Dienstag 12-14 (Briefkasten 89)

1. *Lebesgue-Räume, p-summierbaren und beschränkten Folgen*

   (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $|\Omega| < \infty$. Zeigen Sie, dass dann folgende Inklusion gilt,
   $$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \ , \qquad 1 \leq p < q \leq \infty \ .$$
   Geben Sie ein Gegenbeispiel für Ω unbeschränkt, z.B. $\Omega = [a, \infty)$, $a > 0$.

   (b) Definiere die normierten Vektorräume der p-summierbaren bzw. beschränkten Folgen als
   $$\ell^p := \left\{ (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\} \ , \qquad ||(a_n)||_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \ , \qquad p \in [1, \infty) \ ,$$
   $$\ell^\infty := \left\{ (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty \right\} \ , \qquad ||(a_n)||_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \ .$$
   Zeigen Sie, dass folgende Inklusion gilt,
   $$\ell^p \subset \ell^q \ , \qquad 1 \leq p < q \leq \infty \ .$$

2. *Dualräume*
   Sei $(X, ||.||_X)$ ein normierter Raum und X^* der zugehörige Dualraum, d.h. der Raum der stetigen linearen Funktionale auf X. Zeigen Sie:

   (a) $\quad ||F||_{X^*} := \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{|F(x)|}{||x||_X}$ ist eine Norm auf X^*.

   (b) $\quad (X^*, ||.||_{X^*})$ ist ein Banachraum.

3. *Schwache und Schwach$*$-Konvergenz*
   Sei $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine p-summierbare bzw. beschränkte Folge der Form
   $$a_n = (\, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Position}}}{1}, 0, \ldots) \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ .$$
   Zeigen Sie:
   $$\begin{array}{llll} a_n & \rightharpoonup & 0 & \text{in} \quad \ell^p \ , \qquad p \in (1, \infty) \ , \\ a_n & \rightharpoonup^* & 0 & \text{in} \quad \ell^\infty \ . \end{array}$$
   <u>Hinweis:</u> Es gilt $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ und $(\ell^p)^* = \ell^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Definiere das Dualitätsprodukt durch
   $$\langle (b_n), (a_n) \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n \ , \qquad \forall \ (a_n) \in \ell^p \ , (b_n) \in (\ell^p)^* \ .$$

4. *Variationsmethoden in Banachräumen*
   Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$ und $k \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ mit $||k||_\infty \leq \frac{1}{2|\Omega|}$. Definiere das Funktional $J : L^2(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ als
   $$J(u) = \int_\Omega \int_\Omega k(x,y) u(x) u(y) \ dxdy - \int_\Omega f(x) u(x) \ dx + \int_\Omega u^2(x) \ dx \ .$$
   Zeigen Sie, dass im Fall von
   $$k(x,y) = \int_\Omega h(z,x) h(z,y) \ dz \ , \qquad x, y \in \Omega \ , \qquad h \in C(\Omega \times \Omega) \ ,$$
   ein Minimum von J existiert und dass dieser eindeutig ist.
   <u>Hinweis:</u> Benutzen Sie Satz 3.3 aus dem Skriptum mit $X = Z = L^2(\Omega)$ und setzen Sie voraus, dass die Abbildung $u \mapsto ||u||_2^2$ schwach unterhalbstetig ist.