Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 6, Abgabe bis 27.11.2008, 8:30

Montag 10-12 (Briefkasten 83), Montag 12-14 (Briefkasten 85), Dienstag 12-14 (Briefkasten 89)

1. *Euler-Poisson-Darboux Gleichung*
   Verifizieren Sie die Behauptung aus dem Beweis der Euler-Poisson-Darboux Gleichung (Lemma 2.17 im Vorlesungsskript):

$$\partial_{rr} U(r,t;x) = \fint_{\partial B(x,r)} \Delta u(y,t)\ d\sigma(y) + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \fint_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\ dy\ .$$

2. *Kirchhoff'sche Formel, Lösungsdarstellung der Wellengleichung in 3D*
   Leiten Sie die *Kirchhoff'sche Formel*

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} \left[t v_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y-x)\right]\ d\sigma(y)\ , \qquad x \in \mathbb{R}^3\ ,\ t \in (0,T)\ ,$$

   als Lösungsdarstellung der Wellengleichung im Fall $n = 3$ her.
   Hinweis: Führen Sie mit dem Ansatz $\tilde{U} := rU$, U wie in der Vorlesung, die Euler-Poisson-Darboux Gleichung auf die eindimesionale Wellengleichung in $\mathbb{R}_+ = \{r > 0\}$ zurück. Erweitern Sie dann diese Wellengleichung und die Anfangswerte auf ganz $\mathbb{R}$ durch die Spiegelung um den Ursprung

$$\tilde{U}(r,t) = -\tilde{U}(-r,t)\ , \qquad r < 0\ ,$$

   und benutzen Sie Lösungsdarstellung der eindimensionalen Wellengleichung.

3. *Poisson Formel, Lösungsdarstellung der Wellengleichung in 2D*
   Leiten Sie die *Poisson Formel*

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{t^2 v_0(y) + t u_0(y) + t \nabla u_0(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\ dy\ , \qquad x \in \mathbb{R}^2\ ,\ t \in (0,T)\ ,$$

   als Lösungsdarstellung der Wellengleichung im Fall $n = 2$ her.
   Hinweis: Betrachten Sie für die Herleitung die Wellengleichung für $n = 3$, in welcher die dritte Raumvariable x_3 nicht auftritt. Nehmen Sie dann die Kirchhoff'sche Formel aus Aufgabe 2 und drücken Sie die dritte Raumvariable mit Hilfe der Kreisgleichung aus.

4. *Nicht Differenzierbarkeit der Lösungen*
   Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\partial_{tt} u = \partial_{xx} u\ , \quad u(x,0) = 0\ , \quad \partial_t u(x,0) = g(x)$$

   mit

$$g(x) = \begin{cases} 1\ , & -\varepsilon \le x \le \varepsilon \\ 0\ , & \text{sonst} \end{cases} \qquad .$$