Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 5, Abgabe bis 20.11.2008, 8:30

Montag 10-12 (Briefkasten 83), Montag 12-14 (Briefkasten 85), Dienstag 12-14 (Briefkasten 89)

1. *Maximumprinzip*
   Sei $u \in C^{2,1}(\Omega \times [0,T])$ eine Lösung von
   $$\partial_t u - \nabla \cdot ((1+u^2)\nabla u) + b \cdot \nabla u = 0 \qquad \text{in } \Omega \times \{t \geq 0\}\ ,$$
   wobei $b \in \mathbb{R}^n$ ein konstanter Vektorfeld ist. Zeigen Sie, dann gilt
   $$\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,T]} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\partial\Omega_T} u(x,t)\ ,$$
   mit dem parabolischen Rand
   $$\partial\Omega_T = (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{0\})\ .$$

2. *Lösungseigenschaften der Wärmeleitungsgleichung*
   Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. In einer allgemeineren Form lautet die Wärmeleitungsgleichung
   $$\rho\kappa\partial_t u - \nabla \cdot (\lambda \nabla u) = 0\ , \qquad x \in \Omega\ , t \geq 0\ ,$$
   wobei $\lambda > 0$ der Wärmeleitkoeffizient, $\kappa > 0$ die Wärmekapazität und $\rho > 0$ die Dichte ist. Gegeben seien die Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ und die homogene Neumann-Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf $\partial\Omega \times \{t \geq 0\}$. Zeigen Sie, dass die Lösungen dieser Gleichung folgende Eigenschaften erfüllen:

   (a) Erhaltung des Mittelwertes: für alle $t > 0$ gilt
   $$\int_\Omega u(x,t)\ dx = \int_\Omega u_0(x)\ dx\ .$$

   (b) Energiedissipation: für alle $t > 0$ gilt
   $$\int_\Omega u(x,t)^2\ dx \leq \int_\Omega u_0(x)^2\ dx\ .$$

3. *Glättungseigenschaft der Lösung*
   Suchen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems
   $$\begin{aligned} \partial_t u &= \partial_{xx} u \\ u(x,0) &= \begin{cases} 0\ ,\ x < 0 \\ 1\ ,\ x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$
   in $\mathbb{R}$ von der Form $u(x,t) = \phi(\frac{x}{\sqrt{t}})$.

4. *Wellengleichung in 1D, Separation der Variablen*
   Gegeben sei die Wellengleichung
   $$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}\ , & x \in (0,1)\ , \quad t > 0\ , \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0\ , & t > 0\ , \\ u(x,0) &= u_0(x)\ , & u_0 \in L_2(0,1)\ , \\ u_t(x,0) &= v_0(x)\ , & v_0 \in L_2(0,1)\ . \end{aligned}$$
   Lösen Sie die Gleichung durch Separation der Variablen $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$.