Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 4, Abgabe bis 13.11.2008, 8:30

Montag 10-12 (Briefkasten 83), Montag 12-14 (Briefkasten 85), Dienstag 12-14 (Briefkasten 89)

1. *Energiemethoden*
   Seien $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit $u = g$ auf $\partial\Omega$ und $A \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^{n\times n})$ mit $A(x)$ symmetrisch und positiv definit füt alle $x \in \Omega$ und $\min_x \lambda_{\min}(A(x)) \geq \alpha > 0$. Dann ist u eine Lösung von
   $$-\nabla \cdot (A(x)\,\nabla u(x)) = 0 \qquad \text{in } \Omega$$
   genau dann, wenn
   $$E(u) \leq E(v) \qquad \forall v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})\ , \qquad v = g \text{ auf } \partial\Omega\ ,$$
   mit
   $$E(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla v(x) \cdot (A(x)\,\nabla v(x))\; dx\ .$$

2. *Existenz und Eindeutigkeit des Neumann-Problems*
   (a) Sei $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Zeigen Sie, dass das Neumann-Problem
   $$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in} \quad \Omega\ , \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega\ , \end{aligned} \tag{1}$$
   höchstens eine Lösung u in
   $$C^2_\diamond(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})\ :\ \int_\Omega u\; dx = 0\}$$
   besitzt.
   (b) Sei $u \in C^2_\diamond(\Omega)$ eine Lösung von (1). Dann gilt
   $$\int_\Omega f\; dx + \int_{\partial\Omega} g\; d\sigma(x) = 0\ .$$

3. *Wärmeleitungsgleichung in 1D, Separation der Variablen*
   Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung
   $$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}\ , && x \in (0,1), \qquad t > 0\ , \\ u(0,t) &= u_x(1,t) = 0\ , && t > 0\ , \\ u(x,0) &= u_0(x)\ , && u_0 \in L_2(0,1)\ . \end{aligned}$$
   Lösen Sie die Gleichung durch Separation der Variablen $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$.
   <u>Hinweis:</u> Entwickeln Sie den Operator ∂_{xx} mit den Randbedingungen nach den Eigenfunktionen $\varphi_k(x)$. Benutzen Sie dann die Darstellung in der Eigenfunktionenbasis
   $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k(t)\varphi_k(t)\ ,$$
   um die α_k zu bestimmen. Beachten Sie dabei, dass eine periodische Funktion f mit einer Periode $T > 0$ eine Fourierreihenentwicklung besitzt, wenn die Funktion f, auf eine Periode $[c, c+T]$ eingeschränkt, dem Funktionenraum $L_2(c, c+T)$ angehört.

4. *Wärmeleitungsgleichung, Transportgleichung, Skalierung der Argumente*
   (a) Sei u eine glatte Funktion, die die Gleichung $\partial_t u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ löst. Zeigen Sie, dass dann auch $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ die Wärmeleitungsgleichung für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ löst.
   (b) Sei u eine glatte Funktion, die die Gleichung $\partial_t u + b \cdot \nabla u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ für $b \in \mathbb{R}^n$ konstant löst. Zeigen Sie, dass dann auch $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda t)$ die lineare Transportgleichung für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ löst.