Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 3, Abgabe bis 06.11.2008, 8:30

Montag 10-12 (Briefkasten 83), Montag 12-14 (Briefkasten 85), Dienstag 12-14 (Briefkasten 89)

1. *Mollifier Funktion*
   Zeigen Sie, dass die Funktion
   $$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} ,$$
   $C > 0$ konstant, unendlich oft differenzierbar ist.

2. *Mittelwerteigenschaft für elliptische DGL'n zweiter Ordnung*
   Sei $u \in C^2(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$ die Lösung einer elliptischen DGL zweiter Ordnung der Form
   $$au_{xx} + bu_{yy} + 2cu_{xy} = 0 , \qquad ab > c^2 .$$
   Zeigen Sie, dann gilt für jede Ellipse
   $$E_R(x) \quad = \quad \{z \in \mathbb{R}^2 \ : \ R^2 = (z-x)^T D^{-1}(z-x) \ , \ D = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\} \subset \Omega$$
   die Mittelwerteigenschaft
   $$u(x) = \fint_{\partial E_R(x)} u(y) \ d\sigma(y) .$$

3. *Green-Funktion für den Laplace Operator auf einem Halbraum*
   Betrachten Sie das Dirichlet-Problem der Poisson-Gleichung aus der Vorlesung auf dem Halbraum $\mathbb{R}^n_+$, definiert durch
   $$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n > 0\} .$$
   Ist $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, so ist der Punkt
   $$\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$$
   die Spiegelung von x an der Ebene $\partial\mathbb{R}^n_+$. Überprüfen Sie, dass die Funktion H aus der Vorlesung, hier definiert durch
   $$H(x,y) = -\Phi(\tilde{x} - y) , \qquad x, y \in \mathbb{R}^n_+ ,$$
   die Green-Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$ liefert.

4. *Satz von Liouville*
   Beweisen Sie mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen den Satz von Liouville: Jede beschränkte auf ganz $\mathbb{R}^n$ harmonische Funktion ist konstant.

   Hinweis: Schätzen Sie $|u(x) - u(0)|$ für $x \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe der folgenden Mittelwerteigenschaft nach oben ab: Sei $u \in C^2(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$ harmonisch in Ω, dann gilt für jede Kugel $B_r(x) \subset \Omega$
   $$u(x) = \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} u(y) \ dy ,$$
   wobei ω_n die Oberfläche der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ist.