Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 2, Abgabe bis 30.10.2008, 8 Uhr c.t.

Montag 10-12 (Briefkasten 83), Montag 12-14 (Briefkasten 85), Dienstag 12-14 (Briefkasten 89)

1. *Charakteristikenmethode für die inhomogene Transportgleichung*
   Geben Sie mit Hilfe der Methode der Charakteristiken eine Lösungsformel für die inhomogene Transportgleichung
   $$\begin{aligned} \partial_t u \;+\; b\cdot\nabla u &= f \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\ , \\ u &= u_0 \qquad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{t=0\}\ , \end{aligned}$$
   wobei $b \in \mathbb{R}^n$ konstant und $f \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ ist.

2. *Transportgleichung und Stabilität*
   Benutzen Sie die Methode der Charakteristiken zur Lösung der Transportgleichungen
   $$\partial_t u \ + \nabla\cdot(xu) = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$
   und
   $$\partial_t u \ - \nabla\cdot(xu) = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\ ,$$
   jeweils mit der Anfangsbedingung $u = u_0$ auf $\mathbb{R}^n \times \{t=0\}$, wobei u_0 eine stetige Funktion mit kompakten Träger ist. Was passiert mit $u(\cdot,t)$ für $t \to \infty$ in den beiden Fällen?

3. *Dualität der Transportgleichungen aus der Vorlesung*
   (a) Seien die Differentialoperatoren L_1 und L_2 definiert durch
   $$\begin{aligned} L_1 u &:= \ -\,\partial_t u \ -\ b\cdot\nabla u\ , \\ L_2 u &:= \ \partial_t u \ +\ \nabla\cdot(bu)\ . \end{aligned}$$
   Zeigen Sie, dass L_1 und L_2 adjungiert sind, d.h. für alle $\phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega \times [0,T])$ gilt
   $$\langle L_1\phi, \psi\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} \ = \ \langle \phi, L_2\psi\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])}\ ,$$
   wobei das Skalarprodukt in $L^2(\Omega \times [0,T])$ folgendermaßen definiert ist,
   $$\langle v, w\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} \ = \ \int_0^T \int_\Omega vw\ dxdt\ .$$
   (b) Sei $u(\cdot,t) \in C(\mathbb{R})$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h. $u \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} u\ dx = 1$, die
   $$\partial_t u + \partial_x(bu) = 0$$
   erfüllt. Zeigen Sie, dass die zugehörige Verteilungsfunktion
   $$U(x,t) = \int_{-\infty}^x u(y,t)\ dy$$
   die folgende Gleichung erfüllt,
   $$\partial_t U + b\,\partial_x U = 0\ .$$
   Sei weiter $u(x,t) > 0\ \forall x,t$. Zeigen Sie, dass U eine inverse Funktion v besitzt, d.h.
   $$v(U(x,t),t) = x \qquad\qquad U(v(z,t),t) = z\ ,$$
   und v die folgende Gleichung erfüllt,
   $$\partial_t v(z,t) = b(v(z,t),t)\ .$$

4. *Charakteristikenmethode für die Burgers-Gleichung*
   Erweitern Sie die Charakteristikenmethode aus der Vorlesung zur Lösung der Burgers-Gleichung
   $$\begin{aligned} \partial_t u + u\,\partial_x u &= 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty)\ , \\ u &= u_0 \qquad \text{auf} \quad \mathbb{R} \times \{t=0\}\ . \end{aligned}$$