Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 12, Abgabe bis 29.01.2009, 8:30

Montag 10-12 (Briefkasten 83), Montag 12-14 (Briefkasten 85), Dienstag 12-14 (Briefkasten 89)

1. *Allen-Cahn Gleichung*
   Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, beschränkt und $\varepsilon > 0$. Betrachten Sie das Neumann-Problem der Allen-Cahn Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon}(u^2 - 1)u && \text{in } \Omega \, , \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \, . \end{aligned}$$

   Das zugehörige Energiefunktional E ist definiert durch

$$E(u(t)) = \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \, dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega (u^2(t) - 1)^2 \, dx \qquad \forall t > 0 \, .$$

   Zeigen Sie:

   (a) Für glatte Lösungen der Differentialgleichung gilt $\frac{d}{dt} E(u(t)) \leq 0$.

   (b) E ist schwach unterhalbstetig in $H^1(\Omega)$ für alle $t > 0$.
   <u>**Hinweis:**</u> Verwenden Sie die kompakte Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ für $n \leq 3$.

2. *Viskositätslösungen*

   (a) Sei $\mu \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{2i}{2\mu} \, , && i = 0, \ldots, \mu \, , \\ b_i &= \frac{2i+1}{2\mu} \, , && i = 0, \ldots, \mu - 1 \, . \end{aligned}$$

   Wir defineiren uns eine Funktion u der Form

$$u(x) = \begin{cases} -x + a_i & , \ x \in (a_i, b_i) \\ x - a_{i+1} & , \ x \in (b_i, a_{i+1}) \end{cases} .$$

   Zeigen Sie: Dann gilt $u \in W^{1,\infty}(0,1)$ und $(u')^2 = 1$ fast überall mit $u(0) = u(1) = 0$.

   (b) Berechnen Sie die Lösung von

$$\varepsilon u'' + (u')^2 = 1 \, , \qquad u(0) = u(1) = 0 \, , \qquad \varepsilon > 0 \, ,$$

   und betrachten Sie den Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$.

3. *Gradientenfluss*
   Sei $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt}(t) = -\nabla E(u(t)) \, .$$

   (a) Dann gilt

$$\frac{d}{dt} E(u(t)) = -|\nabla E(u(t))|^2 = -\left|\frac{du}{dt}(t)\right|^2 \, .$$

   (b) Ist E konvex, dann gilt für zwei Lösungen u_1, u_2 der Differentialgleichung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||u_1(t) - u_2(t)||^2 \leq 0 \, .$$

(c) Ist E zweimal stetig differenzierbar und strikt konvex, d.h. es gilt

$$Hess(E) \geq \alpha I \qquad \text{für} \qquad \alpha > 0 \ ,$$

dann gilt

$$||u_1(t) - u_2(t)|| \leq e^{-\alpha t} \, ||u_1(0) - u_2(0)|| \ .$$

4. *Nichtlineares Maximumprinzip*
Sei $\varepsilon > 0$ und $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\partial_t u - \varepsilon \Delta u - |\nabla u|^2 = -1 \ .$$

Dann hat u kein lokales Maximum in $\Omega \times (0,T]$.