Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 11, Abgabe bis 22.01.2009, 8:30

Montag 10-12 (Briefkasten 83), Montag 12-14 (Briefkasten 85), Dienstag 12-14 (Briefkasten 89)

1. *Variationsmethoden für elliptische Gleichungen I*
   Gegeben sei ein Energiefunktional der Form
   $$E(u) = \int_\Omega A(x, |\nabla u|^2) + F(x,u)\ dx\ . \tag{1}$$
   Wir nehmen an, dass die messbaren Funktionen $A : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgende Bedingungen
   $$\begin{array}{ll} C_1|w| + C_2 \geq A(x,w) \geq c_1|w| + c_2\ , & C_1, C_2, c_1 \in \mathbb{R}^+\ ,\ c_2 \in \mathbb{R}\ , \\ \tilde{C}_1|s|^2 + \tilde{C}_2 \geq F(x,s) \geq \tilde{c}_1|s|^2 + \tilde{c}_2\ , & \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{c}_1 \in \mathbb{R}^+\ ,\ \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}\ . \end{array}$$
   erfüllen. Weiterhin nehmen wir auch an, dass gilt:
   $$w \mapsto A(x, |w|^2)\ ,\quad s \mapsto F(x,s) \qquad \text{sind strikt konvex für fast alle } x \in \Omega$$
   und
   $$|F(x,s_1) - F(x,s_2)| \leq \gamma\,(\,|s_1| + |s_2|\,)\,|s_1 - s_2| \qquad \forall x \in \Omega, s_1, s_2 \in \mathbb{R}\ .$$
   Zeigen Sie, dass mit den obigen Annahmen an A und F ein Minimierer von E in $H^1(\Omega)$ existiert und dass dieser sogar eindeutig ist.

2. *Variationsmethoden für elliptische Gleichungen II*
   Wir betrachten eine elliptische Differentialgleichung der Form
   $$-\nabla \cdot (a(x, |\nabla u|^2)\nabla u) + f(x,u) = 0 \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$
   mit den Randbedingungen
   $$\begin{aligned} u &= g && \text{auf } \Gamma_D \subset \partial\Omega\ , \\ a(x, |\nabla u|^2)\nabla u \cdot n &= 0 && \text{auf } \Gamma_N \subset \partial\Omega\ , \end{aligned}$$
   wobei $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ und $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ gelten soll. Die Funktion u mit $u = g$ auf Γ_D erfülle die Eigenschaft
   $$E(u) \leq E(v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \quad \text{mit} \quad v = g \text{ auf } \Gamma_D\ ,$$
   wobei E das Energiefunktional (1) mit $2\partial_w A = a$ und $\partial_s F = f$ ist. Zeigen Sie, dass u die elliptische Differentialgleichung mit den Randbedingungen erfüllt.

3. *Kompakte Einbettung*
   Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Zeigen Sie, dass $L^2(\Omega)$ kompakt in $H^{-1}(\Omega)$, der Dualraum von $H^1(\Omega)$, eingebettet ist.
   Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Banach-Alaoglu und die kompakte Einbettung von $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$.

4. *Eigenwertprobleme*
   Sei $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Gegeben sei ein Eigenwertproblem des Laplace-Operators
   $$\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \lambda u\ , & x \in (0,1)\ , \quad y \in (0,1)\ , \\ u(0,y) &=& u(1,y)\ =\ 0\ , & 0 \leq y \leq 1\ , \\ u_y(x,0) &=& u_y(x,1)\ =\ 0\ , & 0 \leq x \leq 1\ . \end{array}$$
   Bestimmen Sie die nichttriviale Lösungen u und die zugehörige Eigenwerte λ des Eigenwertproblems durch Separation der Variablen $u(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$.