# Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 10, Abgabe bis 12.01.2009, 8:30

Montag 10-12 (Briefkasten 83), Montag 12-14 (Briefkasten 85), Dienstag 12-14 (Briefkasten 89)

1. *Laplace-Gleichung in 2D, Separation der Variablen*
   Gegeben sei das Dirichlet-Problem der Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 , && x \in (0,1) , \quad y \in (0,1) , \\ u(0,y) &= u(1,y) = 0 , && 0 \le y \le 1 , \\ u(x,0) &= 0 , && 0 \le x \le 1 , \\ u(x,1) &= g(x) , && g \in L_2(0,1) \quad \text{mit} \quad g(0) = g(1) = 0 . \end{aligned}$$

   Lösen Sie das Problem durch Separation der Variablen $u(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$.

2. *Stationäre Transportgleichung*
   (a) Seien $a, b \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Wir betrachten die lineare homogene Differentialgleichung

$$a u_x + b u_y = 0 .$$

   Zeigen Sie: Ist $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ entlang jeder Lösung von

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y) , \qquad \frac{dy}{dt} = b(x,y) ,$$

   konstant, so ist $u$ eine Lösung der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^2$.

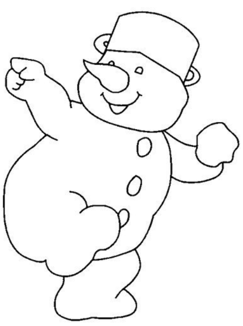
   (b) Bestimmen Sie nach der Methode aus (a) eine Lösung von

$$u_x + 3x^2 u_y = 0 .$$

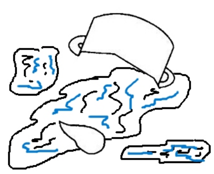
3. *Distributionelle Ableitung*
   Berechnen Sie die distributionellen Ableitungen von

$$u(x) = \begin{cases} x , & 0 < x \le 0.5 \\ 1 - x , & 0.5 < x < 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad u(x) = \begin{cases} x , & 0 < x \le 1 \\ 1 , & 1 < x < 2 \end{cases} .$$

*Dieser Zettel ist freiwillig - die Punkte werden als Bonus zu ihren bisherigen dazugerechnet !*



$\xrightarrow{u_t = \Delta u}$



**Schöne Weihnachten und einen guten Start ins Jahr 2009 !**