Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo WS 2005/06

9. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 20.12. bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{R}^2$, das mindestens einen endlichen Punkt nicht enthält, und sei $y \in \Omega$. Sei f_y die analytische Funktion, welche Ω eineindeutig auf den Einheitskreis abbildet, und zwar so, dass $f_y(y) = 0$, $f_y'(y) = 1$ gilt (Riemannscher Abbildungssatz).
Zeigen Sie: Die Greensche Funktion von Ω ist

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \log |f_y(x)| .$$

(Dabei wird der Punkt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit der komplexen Zahl $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ identifiziert.)
Hinweis. Benutzen Sie dabei die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für f_y.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei f eine Funktion in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, die entlang $x_n = 0$ stetig und beschränkt ist. Für $x_n > 0$ sei

$$u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int\limits_{y_n=0} \frac{f(y)}{|x-y|^n} \, dy_1 \ldots dy_{n-1} .$$

Zeigen Sie: u löst die Dirichletaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad , \quad x_n > 0 , \\ u &= f \quad , \quad x_n = 0 . \end{aligned}$$

3. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$, und f verschwinde außerhalb einer beschränkten Menge. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2(1+f)u &= 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \\ u(x) &= e^{ikx\cdot\vartheta} + v(x) , \end{aligned}$$

wo $\vartheta \in S^2$, $k > 0$ und v die *Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung* erfüllt.
Zeigen Sie: Für $|x| \to \infty$ gilt

$$u(x) = e^{ikx\cdot\vartheta} + \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} A(\frac{x}{|x|}) + O(\frac{1}{|x|^2}) ,$$

wobei für $|\omega| = 1$

$$A(\omega) = k^2 \int_{\mathbb{R}^3} u(y)f(y)e^{-iky\cdot\omega} dy .$$