Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo WS 2005/06

8. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 13.12. bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $u \in C(\Omega)$. u habe in Ω die Mittelwerteigenschaft, d.h. für jedes $x \in \Omega$ ist $u(x)$ der Mittelwert von u über die Oberfläche jeder ganz in Ω liegenden Kugel mit Mittelpunkt x.
Zeigen Sie: Dann ist u in Ω harmonisch.
Hinweis: Die Lösung eines lokalen Dirichlet-Problems zur Laplacegleichung ist harmonisch. Aus der Mittelwerteigenschaft folgt das Maximumprinzip.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Zeigen Sie, daß das Poissonsche Integral in $\mathbb{R}^2$ für den Kreis vom Radius r um den Nullpunkt die Form

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{2\pi r} \int\limits_{|y|=r} \frac{g(y)}{|x-y|^2}\, dy$$

hat.

3. Aufgabe (5 Punkte)

a) Sei Ω die Kugel vom Radius r um x_0 in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, und sei $u \in C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω.

   Zeigen Sie: Ist $u \geq 0$, so gilt $\forall\, x \in \Omega$

$$\left(\frac{r}{r + |x - x_0|}\right)^{n-2} \frac{r - |x - x_0|}{r + |x - x_0|}\, u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{r}{r - |x - x_0|}\right)^{n-2} \frac{r + |x - x_0|}{r - |x - x_0|} u(x_0).$$

b) Zeigen Sie: Eine in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, harmonische Funktion, die nur ein Vorzeichen hat, ist konstant.

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ harmonisch und $x \in \Omega$. Sei r so klein, da auch die Kugel $B_r(x)$ um x mit Radius r noch in Ω liegt. Dann gilt

$$u(x) = \frac{n}{r^n \omega_n} \int\limits_{B_r(x)} u(y) dy = \frac{n}{\omega_n} \int\limits_{B_1(0)} u(x + ry)\, dy.$$

b) Beweisen Sie mit Hilfe von a) den Satz von Liouville: Jede beschränkte auf ganz $\mathbb{R}^n$ harmonische Funktion ist konstant.

   Hinweis zu b): Schätzen Sie $|u(x) - u(0)|$ für $x \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe von a) nach oben ab.