Westfälische Wilhelms-Universität Münster WS 2005/06
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 29.11. bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (8 Punkte (2+2+4))

(a) Zeigen Sie: Das System

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0 \\ a(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} &= f(x,y) \end{aligned}$$

ist in (x,y) hyperbolisch, parabolisch, elliptisch, je nachdem $a(x,y)\ > 0,\ = 0,$ bzw. < 0 ist.

(b) Stellen Sie im hyperbolischen Fall die Normalform her.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Maple die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $a = 1$ und $f(x,y) = xy$. Lösen Sie dann die Anfangswertaufgabe mit $u(x,0) = 0$.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Das System

$$\frac{\partial u}{\partial y} + A\frac{\partial u}{\partial x} = Bu + c \tag{1}$$

sei in Ω hyperbolisch. Sei

$$\varphi : (x,y) \longrightarrow (\xi(x,y), \eta(x,y))$$

eine stetig differenzierbare und umkehrbar eindeutige Abbildung von Ω auf Ω'. Sei u eine Lösung in Ω und sei $v = u \circ \varphi^{-1}$.
Zeigen Sie: v ist Lösung eines hyperbolischen Systems 1. Ordnung, dessen Charakteristiken von der Form φC sind mit Charakteristiken C von (1).

3. Aufgabe (6 Punkte (3+3))

Wir betrachten das lineare System in $u(x,t)$, $v(x,t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - x^2\frac{\partial u}{\partial x} + v + tx &= 0\,, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + (1-tx)u + t &= 0\,. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß das System in $\mathbb{R}^2$ hyperbolisch ist und berechnen Sie die Charakteristiken.

b) Zeigen Sie, daß die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u(x,0) = x \ , \quad v(x,0) = 0 \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

existiert und geben Sie ihren Definitionsbereich an.

Hinweis: Dafür müssen Sie nicht unbedingt die Lösung ausrechnen. Benutzen Sie die Sätze aus der Vorlesung.