Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo WS 2005/06

# 5. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 22.11. bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

**1. Aufgabe** (7 Punkte (3+4))

Lösen Sie mit Hilfe der Charakteristikenmethode die folgenden Anfangswertprobleme.

a)
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \; = \; 0, \qquad u(x,0) \; = \; x.$$

b)
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \; = \; x^2 - y, \qquad u(x,0) \; = \; x.$$

**2. Aufgabe** (6 Punkte)

Man betrachte das Cauchy-Problem

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \; = \; 0, \qquad u(x,0) \; = \; f(x),$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie: Für $f'(x) > 0$ ist das Anfangswertproblem lokal eindeutig lösbar.

b) Lösen Sie es für $f(x) = \frac{1}{3}x^3$.

c) Zeigen Sie: Für Cauchy-Daten $u(0,y) = g(y)$ mit $g \in C^1(\mathbb{R})$ und der $y$-Achse als Anfangsmannigfaltigkeit ist das entsprechende Anfangswertproblem immer lokal eindeutig lösbar.

**3. Aufgabe** (7 Punkte)

Sei für $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \geq 0$ die Funktion $n$ gegeben durch

$$n(\mathbf{x}) \; = \; \frac{n_0}{1 + x_2/m},$$

mit den Konstanten $n_0, m > 0$.
Zeigen Sie: Ist $(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ ein charakteristischer Streifen von $|\nabla u| = n$, so durchläuft $\mathbf{x}$ einen Kreis.