

4. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen”

Abgabe: Di, 15.11. bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

1. Aufgabe (6 Punkte)

Man betrachte das Cauchy-Problem für die Differentialgleichung

$$uu_x + u_y = 1$$

mit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = y^2, y > 0\}$ und $u_\Gamma = 0$.

Finden Sie die Lösung $u(x, y)$ mit Hilfe der Charakteristikenmethode und geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung an. Illustrieren Sie die erhaltenen Resultate in der (x, y) -Ebene anhand einer Skizze.

2. Aufgabe (14 Punkte (4+5+5))

Lösen Sie mit Hilfe der Charakteristikenmethode die folgenden Anfangswertprobleme.

a)

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad u(x, 0) = \ln(x), \quad x > 0.$$

b)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u, \quad u(x, 0) = x^2 + 1.$$

c)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u.$$

Dabei soll die Raumkurve

$$x_0(s) = \cos(s), \quad y_0(s) = \sin(s), \quad u_0(s) = 1$$

in der Lösungsfläche enthalten sein.