Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 08.11. bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \; = \; u^2$$

Zeigen Sie, dass die Anfangswertaufgabe

$$u = x \quad \text{entlang} \quad \Gamma : x + y = 0$$

eine in einer Umgebung von Γ eindeutig bestimmte Lösung hat, welche bei Annäherung an die Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$ betragsmässig unendlich wird.

2. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Seien a, $b \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Wir betrachten die lineare homogene Differentialgleichung

$$a\,\frac{\partial u}{\partial x} + b\,\frac{\partial u}{\partial y} \; = \; 0.$$

Zeigen Sie: Ist $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ entlang jeder Lösung von

$$\frac{dx}{dt} \; = \; a(x,y) \;\; , \qquad \frac{dy}{dt} \; = \; b(x,y)$$

konstant, so ist u eine Lösung der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie nach der Methode aus (a) eine Lösung von

$$u_x + 3x^2 u_y \; = \; 0.$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$3(u-y)^2\,\frac{\partial u}{\partial x} \; - \; \frac{\partial u}{\partial y} \; = \; 0.$$

Die Gleichungen der Raumkurve K, durch welche die gesuchte Lösungsfläche hindurchgehen soll, seien

$$x \; = \; 0, \qquad y \; = \; s, \qquad u \; = \; s.$$

(a) Ist die Kurve K eine Charakteristik der Differentialgleichung?

(b) Geben Sie eine Lösungsfläche an, die durch die Kurve K hindurchgeht.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} = u.$$

Bestimmen Sie diejenige Lösungsfläche der Differentialgleichung, welche die parametrisierte Mannigfaltigkeit

$$x_1 = s_1 + s_2, \qquad x_2 = s_1 - s_2, \qquad x_3 = 1, \qquad u = s_1 s_2.$$

enthält.