Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

# 2. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Mi, 02.11. bis 14:00 Uhr, Übungskästen: 65 (Fr-Übung), F60 (Mo-Übung).

---

**1. Aufgabe** (6 Punkte)

Lösen Sie die Aufgabe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

mit einer Konstanten $c > 0$ und Funktionen $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C(\mathbb{R})$.

**2. Aufgabe** (8 Punkte)

Sei $u = f(x,y,c)$ eine Flächenschar im $\mathbb{R}^3$ mit Parameter $c$. Sei $g$ eine Funktion mit

$$\frac{\partial}{\partial c} f(x,y,g(x,y)) = 0 \, .$$

Dann heisst $u = f(x,y,g(x,y))$ Einhüllende der Flchenschar.

(a) Zeigen Sie: Ist jede Fläche der Schar Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \, ,$$

so auch die Einhüllende.

(b) Zeigen Sie, dass die Flächen

$$u = \sqrt{1 - (x-c)^2 - y^2} \, , \quad (x-c)^2 + y^2 < 1$$

für jedes $c$ Lösungen der Differentialgleichung

$$u^2 \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) = 1$$

sind und bestimmen Sie eine weitere Lösung durch Bildung der Einhüllenden.

**3. Aufgabe** (6 Punkte)

Berechnen Sie (per Hand oder mit Maple) die Charakteristiken der folgenden drei Differentialgleichungen und lassen Sie sich die von ihnen definierten Flächen von Maple für die jeweils angegebenen Definitionsbereiche graphisch anzeigen.

$$(a): \quad x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = \ln x, \quad (x \in ]0,1]);$$

$$(b): \quad x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = u, \quad u(x,0) = \ln x, \quad (x \in ]0,1]);$$

$$(c): \quad xu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x,0) = x, \quad (x \in [-2,2]).$$

(Hinweis: Verwenden Sie jeweils $s = x$ für die Parametrisierung der Anfangskurve.)