

## 14. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 07.02.2006 bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

### 1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $u$  die Lösung von

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx, \quad \forall t > 0.$$

### 2. Aufgabe (7 Punkte)

Seien  $f, g \in C([0, \infty))$ , und sei  $u$  für  $x \in \mathbb{R}^3$  die Lösung von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad u(x, 0) = f(|x|), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(|x|).$$

Zeigen Sie:  $u$  hängt nur von  $|x|$  und  $t$  ab, und die Funktion  $w(r, t) = ru(x, t)$ ,  $|x| = r$  löst

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad w(r, 0) = rf(r), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(r, 0) = rg(r).$$

Geben Sie eine explizite Darstellung von  $u$  an.

### 3. Aufgabe (7 Punkte)

Zeigen Sie: Sei  $u \in C^2(G \times (0, T)) \cap C(\bar{G} \times [0, T])$  Lösung der Differentialgleichung

$$u_t = \Delta u + b \cdot \nabla u - cu$$

mit stetigen  $b, c$  und  $c \geq 0$ . Dann nimmt  $u$  sein Maximum und sein Minimum auf dem parabolischen Rand von  $G \times (0, T)$  an.