

13. Übungsblatt zur Vorlesung “Partielle Differentialgleichungen”

Abgabe: Di, 31.01.2006 bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

1. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $f(x) = e^{-|x|^2}$.

- a) Berechnen Sie die Radon-Transformation Rf von f .
Hinweis. Für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\vartheta \in S^{n-1}$ und $s \in \mathbb{R}$ ist

$$Rf(\vartheta, s) := \int_{x \cdot \vartheta = s} f(x) dx$$

- b) Lösen Sie die Wellengleichung mit den Anfangsdaten $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = 0$ für $n = 3$.

Hinweis.

- vgl. Aufgabe 1 auf dem 12. Übungsblatt.
- Radonsche Inversionsformel für $n = 3$:

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (Rf)(\vartheta, x \cdot \vartheta) d\sigma(\vartheta).$$

2. Aufgabe (7 Punkte)

Zeigen Sie: In $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^1)$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\varepsilon} = \frac{1}{x} - i\pi\delta,$$

wobei $1/x$ für den *Cauchy'schen Hauptwert* steht.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jedes $h \in C^2(\mathbb{R}^1)$

$$u(x, t) = h(t - |x|)/|x|$$

eine Lösung der Wellengleichung in $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^1$ ist.