Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

12. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 24.01.2006 bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^1 \times S^{n-1})$ und

$$f(x) = \int_{S^{n-1}} F(x \cdot \vartheta, \vartheta) d\sigma(\vartheta) \ .$$

Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} (F(x \cdot \vartheta + t, \vartheta) + F(x \cdot \vartheta - t, \vartheta)) d\sigma(\vartheta)$$

Lösung der Wellengleichung mit den Anfangswerten $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$ ist.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Verifizieren Sie die Kirchhoffsche Formel für $n = 1$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2} \ (f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} h(y,\tau) dy d\tau \ . \end{aligned}$$

3. Aufgabe (8 Punkte)

Leiten Sie die Kirchhoffsche Wellenformel für $n = 2$ ausführlich her.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|y|<t} \frac{g(x+y)}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} dy + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|y|<t} \frac{f(x+y)}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} \ dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|y|<t} \int_0^{t-|y|} \frac{h(x+y,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |y|^2}} \ d\tau dy \end{aligned}$$