Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. F. Natterer / E. Dhamo

WS 2005/06

## 11. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 17.01.2006 bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

---

**1. Aufgabe** (6 Punkte)

Sei $\Omega$ ein Normalgebiet in $\mathbb{R}^n$, und sei $u \in C^2(\overline{\Omega \times (0,\infty)})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta_x u \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty)\,, \\ u &= 0 \qquad \text{in} \quad \partial\Omega \times (0,\infty)\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Es ist

$$\int_\Omega \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \right)^2 \right\} dx$$

unabhängig von $t$.

(b) $u$ ist eindeutig bestimmt durch die Werte von $u$ und $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 0$.

**2. Aufgabe** (7 Punkte)

Sei $u$ Lösung der Aufgabe

$$u_x - u_y - q(x)u = 0 \qquad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad , \quad x \in \mathbb{R}^1\,.$$

mit stetigen Funktionen $q$, $\varphi$. Zeigen Sie: Ist $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^1$, so ist $q$ durch die Funktionen $\varphi$ und $u(0,\,\cdot\,)$ eindeutig bestimmt.

**3. Aufgabe** (7 Punkte)

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$u_{tt} = u_{xx}\,, \quad u(x,0) = 0\,, \quad u_t(x,0) = g(x)$$

mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -\varepsilon \le x \le \varepsilon \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Stellen Sie $u(x,x)$ für $t \ge \varepsilon$ als Funktion von $x$ graphisch dar.