

10. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe: Di, 10.01.2006 bis 11:00 Uhr, Übungskästen: 65, F60.

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei A eine reelle invertierbare (n, n) -Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Sei $g(x) = f(Ax + b)$ mit $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Zeigen Sie:

a) $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$;

b) $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|\det(A)|} e^{ib \cdot A^{-T}\xi} \hat{f}(A^{-T}\xi)$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $n = 2$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{div} \frac{x}{|x|^2} = 2\pi\delta$;

(b) $\operatorname{div} \frac{x^\perp}{|x|^2} = 0$, $x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Für $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, sei $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Zeigen Sie:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{z} \right) = \pi\delta.$$

Bemerkung: $\delta(z) = \delta(x, y)$.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f(x) = p(x)e^{-x^2/2}$ mit einem Polynom p vom Grade n . Zeigen Sie, dass \hat{f} die gleiche Gestalt hat.