1. Übungsblatt zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen"

Abgabe der Lösungen am Mi, 26.10. bis 19:00 Uhr, Übungskasten 65.

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

a) Eine Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ heißt *homogen vom Grade* α, wenn

$$u(tx) = t^\alpha u(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

gilt.
Zeigen Sie: $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ ist genau dann homogen vom Grade α, wenn

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha u.$$

b) Lösen Sie die Aufgabe

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2 \backslash \{0\},$$

$u = f(x)$ auf dem Kreis um 0 vom Radius 1. Setzen Sie hinreichende Regularität von u und f voraus.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

a) Zeigen Sie: u ist genau dann eine radiale Funktion (d.h. $u(x)$ hängt nur von $x_1^2 + x_2^2$ ab), wenn

$$x_2 u_{x_1} - x_1 u_{x_2} = 0.$$

b) Leiten Sie eine entsprechende Differentialgleichung für Funktionen u her, welche entlang der Ellipsen

$$\frac{(x_1 - m_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{b^2} = 1,$$

konstant sind. Dabei seien $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$, $a = kb$, $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ fest vorgegeben.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ beliebig.
Zeigen Sie: Erfüllt $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ die Beziehung

$$x_2 = \frac{1}{3} u^3 + f(u - x_1),$$

so ist u Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 1.$$