**Hausaufgabe 3 (Abgabe bis Mittwoch, 30. April, 12 Uhr)**

1. (Aus Evans' "PDEs") Betrachten Sie für $b \in \mathbb{R}^n$ die partielle Differentialgleichung

$$u_t + b \cdot \nabla u = f(t,x) \qquad \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$$

mit Randdaten

$$u = g \qquad \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n\,.$$

- Schreiben Sie Charpits Gleichungen auf. (1 pt)
- Lösen Sie Charpits Gleichungen für die gegebenen Randdaten. (2 pt)
- Leiten Sie aus der Lösung eine Formel für $u$ her. (1 pt)

2. (Aus Evans' "PDEs") Lösen Sie mit Hilfe von Charpits Gleichungen:

- $x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = 2u$, $u(x_1, 1) = g(x_1)$ (1,5 pt)
- $x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_3 = 3u$, $u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$ (1,5 pt)
- $u u_{x_1} + u_{x_2} = 1$, $u(x_1, x_1) = \frac{x_1}{2}$ (1,5 pt)

3. Finden Sie die Lösungen des Problems

$$u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = 1 \text{ in } \{\tfrac{1}{2} < |x| < 2\}, \qquad u(x) = 0 \text{ on } \{|x| = 1\}$$

mittels Charpits Gleichungen. (1,5 pt)

Welches Problem ergibt sich, wenn eine Lösung auf $\{|x| < 2\}$ gesucht wird? (1,5 pt)

4. Bestimmen Sie eine Lösung des Problems

$$u_{x_1}^2 + x_2 u_{x_2} = u \text{ auf } \mathbb{R}^2, \qquad u(x_1, 1) = 1 + \frac{x_1^2}{4}$$

mittels Charpits Gleichungen. Wo ist diese Lösung eindeutig definiert? (3,5 pt)