Übungen zur Vorlesung **Optimierung I**

Übungsblatt 9, Abgabe: Freitag, 11.01.2008, 8.15 Uhr

Aufgabe 28: (6 Punkte)
Bei der Lösung des Problems

$(P) \qquad \min\{cx \;\mid\; Ax \geq b, \quad x \geq 0\}, \quad c \geq 0$

mit dem dualen Simplex-Verfahren löst man

$(P_1) \qquad \min\{cx \;\mid\; -Ax + y = -b, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$

vom "dualen Standpunkt". Die optimale Lösung sei nicht entartet.
Zeigen Sie: Die optimale Lösung λ des dualen Problems

$(P^*) \qquad \max\{\lambda b \;\mid\; \lambda A \leq c, \quad \lambda \geq 0\}$

erhält man aus dem optimalen Tableau folgendermaßen:

(a) y_j Basis-Variable $\Rightarrow \lambda_j = 0$,

(b) y_j Nicht-Basis-Variable $\Rightarrow \lambda_j = -r_{N(j)}$, $r_{N(j)}$ ist der unter y_j stehende Koeffizient.

Hinweis: Zeigen Sie, dass zwischen der Lösung $\tilde{\lambda}$ des dualen Problems von (P_1) und der Lösung λ von (P^*) die Beziehung $\lambda = -\tilde{\lambda}$ gilt.

(c) Überprüfen Sie die Aussage in (a) und (b) an der Lösung des LP's

$$\min\{x_1 + x_2 \mid 2x_1 + x_2 \geq 12, \;\; 5x_1 + 8x_2 \geq 74, \;\; x_1 + 6x_2 \geq 28, \quad x \geq 0\}.$$

Aufgabe 29: (Programmieraufgabe, Abgabe: 11.01.2008, 8.15 Uhr)
Gegeben sei das lineare zeitdiskrete Maschinen-Reparatur-Problem

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & \sum_{i=0}^{N-1} \Big(px_i - u_i\Big) + px_N \\ \text{unter} \quad & x_{i+1} = x_i + \frac{T}{N}(-\delta x_i + gu_i), \qquad i = 0, \ldots, N-1, \\ & 0 \leq u_i \leq u_{\max}, \qquad i = 0, \ldots, N-1, \end{aligned}$$

mit den Optimierungsvariablen $x_1, \ldots, x_N, u_0, \ldots, u_{N-1}$. Der Wert x_0 sei vorgegeben. Die Variablen und Parameter haben dabei die folgenden Bedeutungen:

$T > 0$:	Nutzungsdauer der Maschine,
x_i:	Qualitätsgrad der Maschine zur Zeit $t_i = i\frac{T}{N}$,
u_i:	Reparaturaufwand bzw. Wartungskosten für die Maschine zur Zeit t_i,
$\delta > 0$:	Verschleißrate,
$g > 0$:	Koeffizient der Reparatur-Effektivität,
$p > 0$:	Produktionsrate.

(a) Lösen das LP mit Hilfe von AMPL/IPOPT anhand der Parameter

$$T = 10, \quad p = 4, \quad \delta = 0.07, \quad g = 0.05, \quad u_{\max} = 1 \qquad (*)$$

mit Anfangswert $x_0 = 1$ für $N = 10^j$, $j = 1, 2, 3$, und plotten sie x_i, $i = 0, \ldots, N$, sowie u_i, $i = 0, \ldots, N-1$.

(b) **3 Sonderpunkte:** Zeigen Sie, dass bei jeder Wahl von $x_0 \in [0,1]$ und $N \in \mathbb{N}$ mit den Parametern aus $(*)$ für beliebigen Reparaturaufwand $0 \le u_i \le u_{\max}$, $i = 0, \ldots, N-1$, gilt:

$$x_i \in [0,1] \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

Somit kann die natürliche Beschränkung $0 \le x_i \le 1$, $i = 1, \ldots, N$, des Qualitätsgrades weggelassen werden.

Hinweis: Unterscheiden Sie bei der Abschätzung $x_i \le 1$ die Fälle $x_0 \ge \frac{g}{\delta}$ und $x_0 < \frac{g}{\delta}$.

Aufgabe 30: (Programmieraufgabe, Abgabe: 11.01.2008, 8.15 Uhr)
Betrachten Sie die Funktionen

(a)

$$f(t) = sin^2(\frac{2}{e^t})$$

und

(b)

$$f(t) = \frac{1}{1 + 25t^2}$$

auf dem Intervall $I = [-1, 1]$. Gegeben sei eine Unterteilung

$$-1 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < t_N = 1.$$

Wir suchen eine Polynom

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, t^k,$$

welches die Funktionen f in dem Sinne möglichst gut approximiert, dass der maximale Betrag der Residuen $r_k := P_n(t_k) - f(t_k)$, $k = 1, \ldots, N$, minimal wird.
Formulieren Sie dieses Problem mit den Techniken aus Aufgabe 25 als geeignetes lineares Optimierungsproblem und lösen Sie dieses mit AMPL/IPOPT. Verwenden Sie bei Teilaufgabe (a) und (b) als Polynomgrad $n = 2, 4, 8$ und wählen Sie jeweils $N = 50$ und $N = 500$ äquidistante Stützstellen. Plotten Sie für diese sechs Fälle jeweils $P_n(t)$ und $f(t)$ in einer Graphik und vergleichen Sie die Residuen.
Abgabe: Quellcode, Graphen und Werte der Residuen.

****

WIR WÜNSCHEN IHNEN EIN FROHES WEIHNACHTSFEST

UND ALLES GUTE FÜR DAS JAHR 2008!

H. Maurer B. Christiansen