Prof. Dr. H. Maurer, Dipl.-Math. Bahne Christiansen WS 07/08

Übungen zur Vorlesung **Optimierung I**

Übungsblatt 8, Abgabe: Freitag, 14.12.2007, 8.15 Uhr

Aufgabe 25: (6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge.

Zeigen Sie: Ist $\overline{x} \in K$ eine lokale Minimalstelle des Problems

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{für} \quad x \in K ,$$

so gilt die Variationsungleichung

$$(V) \qquad \langle \nabla f(\overline{x}), v \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } \ v \in K(\overline{x}) ,$$

wobei $K(\overline{x})$ die konische Hülle von K bzgl. $\overline{x}$ ist. Mit welcher Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann mit (V) der Trennungssatz (A.6) im Falle $y \notin \overline{K}$ bewiesen werden?

Hinweis: Es gilt $\overline{x} + \alpha(y - \overline{x}) \in K$ für alle $y \in K$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Aufgabe 26: (5 Punkte)
Der Nikolaus hat Lakritzstangen der Länge 40 cm auf Lager. Zur Bescherung benötigt er

mindestens	4000	Lakritzstangen der Länge	18 cm,
mindestens	5000	Lakritzstangen der Länge	16 cm,
mindestens	3000	Lakritzstangen der Länge	12 cm .

nnn Wie muss der Nikolaus die 40 cm langen Lakritzstangen zuschneiden, damit der Abfall möglichst gering wird?
Hinweis: Es gibt 6 Strategien (Begründung!), die 40 cm langen Stangen zuzuschneiden. Setzen Sie $x = (x_1, \ldots, x_6)^T$, wobei x_i die Anzahl der Stangen ist, die nach Strategie i zugeschnitten werden. Lösen Sie das Problem mit dem dualen Simplex-Verfahren.

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Eine Aufgabenstellung aus der statistischen Schätztheorie führt auf das folgende LP:

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\ \text{unter} \quad & \sum_{j=1}^{n} q_j x_j \leq \beta, \\ & 0 \leq x_j \leq 1 , \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Hierbei seien $p_j > 0$ und $q_j > 0$ Zahlen mit

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \,, \qquad \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_n}{q_n}.$$

Die Zahl $\beta > 0$ sei hinreichend klein.

(a) Stellen Sie das zum obigen Problem duale Problem auf in der Variablen $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Zeigen Sie, dass für den Index

$$k := \min\{j \in \{1, \ldots, n\} \mid q_{j+1} + q_{j+2} + \cdots + q_n \leq \beta\}$$

die optimalen Lösungen des obigen LP und des dualen LP gegeben sind durch:

$$x_j = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ,\ j < k \\ (\beta - q_{k+1} - \cdots - q_n)/q_k & ,\ j = k \\ 1 & ,\ j > k \end{array} \right\} ,$$

$$\lambda_j = \left\{ \begin{array}{ll} p_k/q_k & ,\ j = 0 \\ 0 & ,\ 1 \leq j \leq k \\ q_j \left(\frac{p_j}{q_j} - \frac{p_k}{q_k} \right) & ,\ j > k \end{array} \right\} .$$