Übungen zur Vorlesung **Optimierung I**

Übungsblatt 6, Abgabe: Freitag, 30.11.2007, 8.15 Uhr

Aufgabe 16: (2 Punkte)
Mit den Bezeichnungen von § 6 seien die Basen $B = (1, \ldots, m)$, $\overline{B} = (1, \ldots, p-1, s, p+1, \ldots, m)$ gegeben. Für die $(m \times m)$–Matrix S mit

$$Se_i = e_i \quad (i \neq p) \ , \quad S\tilde{a}^s = e_p$$

zeige man

$$A_{\overline{B}}^{-1} = SA_B^{-1} \ .$$

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Lösen Sie mit Hilfe des revidierten Simplexverfahrens das Problem

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{maximiere} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 12, \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 12, \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 10, \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie für die Pivotsuche die Auswahlregel (4.12 a).

Aufgabe 18: (2+3 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen über konische Hüllen:

(a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und sei $x \in \text{int}(M)$. Die konische Hülle von M bzgl. x ist gegeben durch $M(x) = \mathbb{R}^n$.

(b) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer Kegel und $x \in K$, so ist die konische Hülle von K bzgl. x gegeben durch

$$K(x) = K + \mathbb{R}x = \{y + \alpha x \mid y \in K \ , \ \ \alpha \in \mathbb{R}\} \ .$$

Für $K = \mathbb{R}^n_-$ gilt insbesondere

$$K(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_i \leq 0 \ , \ \ \text{falls} \quad x_i = 0, \ \ i = 1, \ldots, n\} \ .$$

Aufgabe 19: (3 Punkte)
Gegeben seien eine in einem Intervall stetige Funktion $f(t)$ und N diskrete Abszissen t_k, $k = 1, \ldots, N$. Gesucht ist ein Polynom $P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$, welches die Funktion $f(t)$ in dem Sinne möglichst gut approximiert, dass der maximale Betrag der *Residuen* $r_k := P_n(t_k) - f(t_k)$, $k = 1, \ldots, N$, minimal wird (TSCHEBYCHEV - Approximation).
Formulieren Sie dieses Problem als ein geeignetes lineares Optimierungsproblem.
Hinweis: Welche Ungleichungen gelten für $R := \max\{|r_k| \mid k = 1, ..., N\}$?

Aufgabe 20: (Programmieraufgabe, Abgabe: 7.12.2007, 8.15 Uhr)
Die Geschäftsleitung einer großen Gemeinschaftsküche hat beschlossen, das Speiseprogramm so zu bestimmen, dass unter Einhaltung der pro Kopf vorgeschriebenen Nährstoffe die Menge (d.h. die Gesamtmasse) der hierzu benötigten Rohmaterialien minimal sei.
Die Nährstoffgehalte der verwendeten Rohstoffe sowie der tägliche (Mindest-)Bedarf eines Menschen sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Lebensmittel	Kalorie [cal/kg]	Eiweiß [g/kg]	Fette [g/kg]	Kohlehydrate [mg/kg]	Vitamine A [mg/kg]	Vitamine B [mg/kg]	Vitamine C [mg/kg]	Vitamine D [mg/kg]
Mehl	3223	124	13	650	0	7	0	0
Reis	3540	64	3	776	0	1	0	0
Fleisch	2650	149	223	2	0	4	7	0.4
Fett	9200	3	1000	0	0	0	0	0
Butter	7300	6	800	5	22	1	5	100
Milch	860	110	27	43	3.5	0.8	15	6
Eier	1600	126	120	7	50	1	4	60
Grünzeug	226	19	2	38	39	0.5	250	0.1
Gewürze	430	12	1	90	50	5	20	0
Kartoffeln	950	25	2	200	0	1	200	0
Hülsenfrüchte	3150	245	18	500	11	0.5	45	5
Obst	655	5	0	140	0	1.3	67	0
Füllwaren	4000	105	220	377	0	0	0	0
Zucker	4100	0	0	998	0	0	0	0
Kakao	4650	223	265	315	0	0	0	0
Bedarf	3350	160	100	500	2	4	50	0.1

Ferner muss man berücksichtigen:

1. Mindestens 60 g Eiweiß müssen aus tierischem Eiweiß (Fleisch, Fett) gedeckt werden.
2. Der tägliche Zuckerverbauch darf nicht höher als 100 g sein.
3. Der monatliche Verbrauch an Hülsenfrüchten darf 1000 g nicht überschreiten.
4. Der monatliche Verbrauch an Obst muss mindestens 4000 g sein.

Minimieren Sie mit AMPL/IPOPT die Gesamtmasse aller verwendeten Rohstoffe unter den obigen Restriktionen.
Informationen zur effizienten Formulierung dieses Problems sowie die benötigten numerischen Werte als Datenfile finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung.