Übungen zur Vorlesung **Optimierung I**

Übungsblatt 3, Abgabe: Freitag, 9.11.2007, 8.15 Uhr

Aufgabe 7: (2+2 Punkte)

(a) Sei $a_i > 0, i = 1, \ldots, n$. Bestimmen Sie sämtliche Ecken von

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b, \qquad x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

(b) Lösen Sie das LP

$$\min \ \{ cx \mid Ax = b, \ x \geq 0 \}$$

mit

$$c = (2, -3, -7, 7), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8: (3 Punkte)
Zeigen Sie: Der Punkt $x = (0, 4, 1, 0, 6)^T$ ist eine Lösung des LP

$$\max \ \{ cx \mid Ax = b, \ x \geq 0 \}$$

mit

$$c = (0, 1, -4, 0, 2), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9: (2+2+2 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die konvexe Hülle $\text{co}(K)$ einer Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert als die kleinste konvexe Menge, die K enthält, d.h.

$$\text{co}(K) := \bigcap \{ M \subset \mathbb{R}^n \mid M \text{ konvex }, \ K \subset M \} \ .$$

Zeigen Sie:

$$\text{co}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \mid x_i \in K \ , \ \ \alpha_i \geq 0 \ , \ \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ \ k \in \mathbb{N} \right\} \ .$$

(b) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $x \in \overset{\circ}{K}$, $y \in \overline{K}$, so gilt

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in \overset{\circ}{K} \quad \text{für} \quad 0 \leq \alpha < 1\ .$$

(c) Für eine konvexe Menge K mit $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ gilt $\mathrm{int}\overline{K} = \mathrm{int}K$.