Übungen zur Vorlesung **Optimierung I**

Übungsblatt 10, Abgabe: Freitag, 18.01.2008, 8.15 Uhr

Aufgabe 31: (6 Punkte)

(a) Diskutieren Sie den Sensitivitätssatz (1.8) für das Problem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x,p) = x_1^2 + px_2^2 - px_1x_2 + x_2$$

für alle $p \in \mathbb{R}$.

(b) In der LANDAU-Theorie der Phasenübergänge bei Kristallen minimiert man die freie Energie bei fester Temperatur T:

$$\min_{s\in\mathbb{R}} F(s,T) = \frac{1}{2}Ts^2 - \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{4}s^4 \ .$$

Hierbei bezeichnet $s \in \mathbb{R}$ die Variable der Phase. Diskutieren Sie den Senisitivitätssatz (1.8) für $0 < T < \frac{1}{4}$.

Aufgabe 32: (6 Punkte)

(a) Seien $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ C^1-Abbildungen mit $\det(g_x(x,y)) \neq 0$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Sei $(\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ optimal für das Optimierungsproblem

$$\min_{(x,y)\,\in\,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k} \{f(x,y) \mid g(x,y) = 0\} \ .$$

Zeigen Sie: Es gibt einen Zeilenvektor $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, so dass die Multiplikatorenregel von LAGRANGE gilt:

$$(*) \quad f_x(\overline{x},\overline{y}) + \overline{\lambda} g_x(\overline{x},\overline{y}) = 0, \quad f_y(\overline{x},\overline{y}) + \overline{\lambda} g_y(\overline{x},\overline{y}) = 0 \ .$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz (1.7) über Implizite Funktionen an und betrachten Sie ein geeignetes Optimierungsproblem in der Variablen y.

(b) Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\min \{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \ \mid \ xy = c\} \ , \quad c > 0 \ ,$$

grafisch und analytisch. Bestimmen Sie den Multiplikator $\overline{\lambda}$ in (*).

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Sei A eine symmetrische $n \times n$ -Matrix. Untersuchen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x) = \langle x,\, Ax \rangle$$

unter der Nebenbedingung $||x||_2 = 1$.
Hinweis: Verwenden Sie die Multiplikatorenregel von LAGRANGE (siehe Aufgabe 32 (a), (*)) und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.