Prof. Dr. H. Maurer, Dipl.-Math. Bahne Christiansen

Übungen zur Vorlesung **Optimierung I**

Übungsblatt 1, Abgabe: Freitag, 26.10.2007, 8.15 Uhr

Wöchentliche Übungstermine:

Gruppe 1:	Mo.	10 Uhr	SR1	BK	83	(Vitali Gretschko)
Gruppe 2:	Di.	10 Uhr	SR1	BK	83	(Vitali Gretschko)
Gruppe 3:	Di.	12 Uhr	SR2	BK	82	(Hendrik Halbach)
Gruppe 4:	Di.	16 Uhr	SR1	BK	86	(Julia Meskauskas)

Die Teilnahme an einer Übungsgruppe setzt eine Anmeldung über das Kursbuchungssystem des Fachbereichs 10 voraus. Informationen hierzu sowie Aktuelles rund um die Vorlesung sind zu finden unter:

`http://wwwmath1.uni-muenster.de/num/Vorlesungen/Optimierung_WS07`

Aufgabe 1: (2+1+1 Punkte)
Gegeben seien die nichtleere und konvexe Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ sowie die konvexe Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Jedes lokale Minimum von f ist auch ein globales Minimum von f.

(b) Die Menge der (globalen) Minima ist konvex.

(c) Ist f streng konvex, dann existiert höchstens ein (globales) Minimum.

Aufgabe 2: (1+1+1+2 Punkte)
Hinweis: Setzen Sie folgendes Resultat als bekannt voraus:

1. (Hess $f)(x)$ positiv semidefinit $\Rightarrow f$ konvex.
2. (Hess $f)(x)$ positiv definit $\Rightarrow f$ strikt konvex.

Gegeben sei eine quadratische Funktion der Gestalt

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Sei A *positiv definit*. Zeigen Sie, dass es nur einen stationären Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (d.h. $\nabla f(\bar{x}) = 0$) gibt und geben Sie diesen explizit an. Ist $\bar{x}$ in diesem Fall auch ein striktes globales Minimum von f?

(b) Seien A *positiv semidefinit* (aber nicht positiv definit) und $b \in \text{Bild}(A)$. Zeigen Sie, dass es in diesem Fall unendlich viele stationäre Punkte gibt, die auch Minima von f sind. Untersuchen Sie den Fall $b \notin \text{Bild}(A)$.

(c) Sei A *indefinit*, aber invertierbar, d.h. A habe sowohl positive als auch negative Eigenwerte, die alle ungleich Null sind. Zeigen Sie, dass es nur einen stationären Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt, der aber weder Minimum noch Maximum ist („Sattelpunkt").

(d) Illustrieren Sie die vorangegangenen drei Fälle für $n = 2$ und $b = 0 \in \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie mit MATLAB jeweils die vier Höhenlinien $f(x) = t, \quad t = -1, 0, 1, 2$ für die Fälle

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Benötigter MATLAB-Befehl: `contour`.)

Aufgabe 3: (2+2+3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{(-x^2-4y^2)}.$$

(a) Stellen Sie f im Bereich $-2 \leq x, y \leq 2$ mit MATLAB graphisch dar.
(Hinweis: Benötigte MATLAB-Befehle: `meshgrid` und `mesh`)

(b) Stellen Sie die Höhenlinien (Niveaumengen) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = z\}$ für $z = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1$ im Bereich $-2 \leq x, y \leq 2$ mit MATLAB dar.
(Hinweis: Benötigter MATLAB-Befehl: `contour`.)

(c) Berechnen Sie (per Hand) die lokalen Extrema von f, indem Sie alle stationären Punkte bestimmen und die Hesse-Matrix (Hess f)(x) in diesen Punkten auf Definitheit untersuchen.

Bitte bei (a) und (b) die Achsen (`xlabel, ylabel,` *ggf.* `zlabel`) *und die Graphik* (`title`) *beschriften und die Ausdrucke der Plots abgeben.*