Übungen zur Vorlesung Optimale Steuerprozesse I

Übungsblatt 9, Abgabe: Dienstag, 01.07.2008, 08.15 Uhr

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Diskutieren Sie die zeitoptimale Steuerung zum Nullpunkt $(0,0)$ des folgenden Systems

$$\begin{array}{lcl} \dot{x} = u_1 + u_2 & , & x(0) = x_0 \geq 0\,, \\ \dot{y} = u_1 - u_2 & , & y(0) = y_0 \geq 0\,, \\ |u_i(t)| \leq 1 & , & 0 \leq t \leq T\,. \end{array}$$

Bestimmen Sie die Endzeit T und die adjungierten Variablen.
Hinweis: Überlegen Sie, dass $u_1(t) \equiv -1$ gilt.

Aufgabe 32: (4 Punkte)
Gegeben sei der optimale Steuerprozess

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 u(t)^2\,dt \\ \text{unter} & \dot{x} = x + u\,, \quad x(0) = 1\,, \quad x(1) = 1\,. \end{array}$$

Berechnen Sie explizit die optimale Lösung $x(t)$, $u(t)$ und $\lambda(t)$.

Aufgabe 33: (3+1+3 Punkte)
Gegeben seien eine C^2-Funktion $L : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ und $x_0,\, x_T \in \mathbb{R}^n$. Gesucht ist eine C^1-Funktion $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ mit festem $T > 0$, welche das folgende *Variationsproblem* löst:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimiere} & \displaystyle\int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt \\ \text{unter} & x(0) = x_0\,, \qquad x(T) = x_T\,. \end{array}$$

(a) Beweisen Sie die EULER-LAGRANGE-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) - L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0\,, \qquad 0 \leq t \leq T\,.$$

(b) Für autonome Probleme beweise man die Beziehung

$$L(x(t), \dot{x}(t)) - L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))\,\dot{x}(t) \equiv const\,.$$

(c) Berechnen Sie die Lösung des Variationsproblems für

$$L(t, x, \dot{x}) = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2\right)^{1/2}.$$

Hinweis: Definieren Sie die Steuerung $\dot{x}(t) = u(t)$ und benutzen Sie das Minimumprinzip (6.3).

Aufgabe 34: (4 Punkte)
Optimale Lagerhaltung (Beispiel aus der Vorlesung)

$$\begin{array}{rcl} x(t) & : & \text{Lagerbestand (Zustandsvektor)} \\ \tilde{x}(t) & : & \text{gewünschter Lagerbestand} \\ u(t) & : & \text{Produktion (Steuervariable)} \\ \tilde{u}(t) & : & \text{gewünschte Produktion} \\ d(t) & : & \text{Nachfrage (demand)} \end{array}$$

Betrachten Sie folgendes Problem:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimiere} & \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^T \left(h(x(t)-\tilde{x}(t))^2 + (u(t)-\tilde{u}(t))^2\right)\,dt \\ \text{unter} & \dot{x} = u(t) - d(t), \\ & x(0) = x_0. \end{array}$$

(a) Diskutieren Sie die Minimumbedingung und geben Sie die adjungierte Differentialgleichung an.
(b) **Programmieraufgabe**

Behandeln Sie das Problem mit AMPL/IPOPT. Die Nachfragefunktion hat die zyklische Form $d(t) = a + b\sin(\sqrt{h}(T-t))$. Die numerischen Daten lauten: $\tilde{u}(t) \equiv \tilde{x}(t) \equiv a = 10$, $x_0 = b = 5$, $h = 1$, $T = 12$. Transformieren Sie das Problem in die autonome Mayer-Form und approximieren Sie die Differentialgleichungen einmal mit dem EULER-Verfahren und einmal mit dem HEUN-Verfahren für die Schrittweiten $N = 1200, N = 12000$. Vergleichen Sie die Plots von $u(t)$ und $\tilde{u}(t) - \lambda(t)$ und geben Sie die Nachfragefunktion $d(t)$ aus. Approximieren Sie das Zielfunktional mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel.

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Eine Firma bestehe aus den Bereichen Marketing und Produktion mit den

Zustandsvariablen x (kumulierter Absatz), z (Lagerbestand),

den *Steuervariablen* p (Preis), v (Produktion)

und den Größen

$$\begin{array}{lcll} f(x,p) & = & e^{-p}\,(x+0.1)(1-x) & : \text{Nachfragefunktion,} \\ c(v,x) & = & 0.5\,e^{-x}\,v^2 & : \text{Produktionskosten,} \\ h(z) & = & 0.5\,z^2 & : \text{Lagerhaltungskosten.} \end{array}$$

Betrachten Sie folgende Steuerprobleme:

$$\begin{array}{rl} \text{(i) Maximiere} & \displaystyle\int_0^T e^{-rt}\,p\,f(x,p)\,dt \\ \text{unter} & \dot{x} = f(x,p)\,, \quad x(0) = x_0\,. \\ \text{(ii) Maximiere} & \displaystyle\int_0^T e^{-rt}\,[\,p\,f(x,p) - c(v,x) - h(z)\,]\,dt \\ \text{unter} & \dot{x} = f(x,p) \qquad , \quad x(0) = x_0\,, \\ & \dot{z} = v - f(x,p)\,, \quad z(0) = z_0\,, \quad z(T) = z_T\,. \end{array}$$

(a) Diskutieren Sie die Minimumbedingung und geben Sie die adjungierten Differentialgleichungen an.

(b) **Programmieraufgabe**

Lösen Sie die Steuerprobleme mit AMPL/IPOPT. Formen Sie die Probleme dabei zunächst in die autonome Mayer-Form um und approximieren Sie die Differentialgleichungen einmal mit dem EULER-Verfahren und einmal mit dem HEUN-Verfahren. Geben Sie die optimalen Trajektorien und die adjungierten Variablen graphisch aus.
Die numerischen Daten lauten: $r = 0.05,\ x_0 = 0,\ z_0 = 0,\ z_T = 0,\ T = 20$.

Hinweis: Probieren Sie verschiedene Startschätzungen für die Optimierungsvariablen aus. Die Hilfsfunktion f deklariert man in AMPL beispielsweise wie folgt:

```
var f {i in 1..N} = exp(-p[i])*(x[i]+0.1)*(1-x[i]);
```