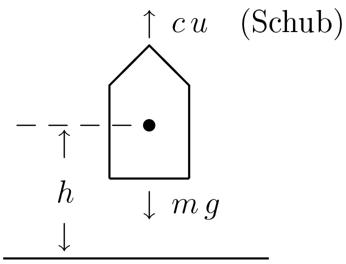
Übungen zur Vorlesung Optimale Steuerprozesse I

Übungsblatt 5, Abgabe: Dienstag, 20.05.2008, 08.15 Uhr

Aufgabe 17: (3+3+2 Punkte)
(*GODDARD–Problem*)
Für eine senkrecht aufsteigende Rakete gelten bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes die Bewegungsgleichungen

$$\begin{array}{rcllrcl} \dot{h} & = & v\,, & & h(0) & = & 0\,, \\ \dot{v} & = & \frac{c}{m}u(t) - g\,, & & v(0) & = & 0\,, \\ \dot{m} & = & -u(t)\,, & & m(0) & = & m_0\,, \\ 0 & \le & u(t) & \le & u_{\max}\,, & & \end{array}$$



mit positiven Konstanten c, g.

(a) Integrieren Sie die DGL mit der (stückweise konstanten) Steuerung

$$(*) \qquad u(t) = \begin{cases} u_0 & , \quad 0 \le t \le t_1 \\ 0 & , \quad t_1 < t \le T \end{cases} \quad , \quad 0 < u_0 \le u_{\max}\,.$$

Zur Zeit t_1 sei die Treibstoffmenge $\mu = m_0 - m(t_1) > 0$ verbraucht.

(b) Bestimmen Sie u_0 in $(*)$ so, dass die Aufstiegshöhe $h(t_1)$ maximal wird. Berechnen Sie die Endzeit T aus $v(T) = 0$ und geben Sie die (totale) Aufstiegshöhe $h(T)$ an.

(c) Bestimmen Sie u_0 in $(*)$ so, dass die totale Aufstiegshöhe $h(T)$ maximal wird.

Hinweis: $\int \ln(a - bt)\,dt = (t - \frac{a}{b})\,\ln(a - bt) - t\,.$

Aufgabe 18: (5 Punkte)
Sei $L : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und sei $U \subset \mathbb{R}^m$ konvex. Gesucht ist eine stückweise stetige Steuerung $u : [0,T] \to U$, welche

$$\int_0^T L(t, u(t))dt$$

minimiert. Beweisen Sie das folgende *Minimumprinzip* für eine optimale Steuerung $\bar{u}$:

$$L(t, \bar{u}) \le L(t, u) \quad \text{für alle } u \in U\,, \quad 0 \le t \le T\,.$$

Folgern Sie hieraus

$$L_u(t, \bar{u})(u - \bar{u}) \ge 0\,, \quad u \in U\,, \quad 0 \le t \le T\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie in einem Stetigkeitspunkt $t \in (0, T]$ für $\epsilon > 0$ und einen beliebigen Vektor $u \in U$ die Funktion

$$u_\epsilon(s) = \begin{cases} u, & s \in [t - \epsilon, t], \\ \bar{u}(s), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 19: (Programmieraufgabe, Abgabe: Dienstag, 20.05.08, 08.15 Uhr)
Transformieren Sie den folgenden optimalen Steuerprozess mit freier Endzeit in die Mayer-Form mit fester Endzeit und lösen Sie es mit AMPL/IPOPT.

(Zeitoptimale Steuerung des Van der Pol-Oszillators:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimiere} & T \\ \text{unter} & \dot{x_1} = x_2\,, \\ & \dot{x_2} = -x_1 + x_2(1 - x_1^2) + u\,, \\ & x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1 \\ & -1 \leq u(t) \leq 1\,, \quad 0 \leq t \leq T\,. \end{array}$$

Betrachten Sie dazu die folgenden Zustandsbedingungen:

(a) $x_1(T)^2 + x_2(T)^2 = 0.01$

(b) $x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0$

Benutzen Sie zur Lösung der Differenzialgleichungen das Euler-Verfahren mit $N = 1001$ Diskretisierungspunkten. Plotten Sie die optimalen Trajektorien (x, u) und die zugehörigen adjungierten Variablen λ.

Hinweis: Bei der numerischen Lösung mit AMPL/IPOPT kann man die freie Endzeit T anstatt als neue Zustandsvariable auch als eindimensionale Optimierungsvariable ansehen. Setzen Sie ggfs. natürliche Beschränkungen, damit das Optimierungsverfahren konvergiert.

Denken Sie an die Abgabe der Aufgabe 16!!