

Übungen zur Vorlesung Optimale Steuerprozesse I

Übungsblatt 1, Abgabe: Dienstag, 15.04.08, 08.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1: Di. 10.00 - 12.00 Uhr SR1 BK 90 (Julia)

Gruppe 2: Di. 12.00 - 14.00 Uhr SR1 BK 90 (Julia)

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Gegeben sei das Problem

$$\min\{f(x) = -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \mid g(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0\}.$$

Diskutieren Sie die Bedingungen aus dem Satz von KUHN-TUCKER.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\max\{f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\sqrt{x_1} + x_2 \mid x_1 \geq 0.1, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

- (a) Skizzieren Sie die zulässige Menge und lösen Sie das Problem graphisch.
- (b) Zeigen Sie, dass alle Punkte der zulässigen Menge normal sind und berechnen Sie die Lösung, indem Sie den Satz von KUHN-TUCKER für alle Kombinationen aktiver Ungleichungen diskutieren. Warum besitzt das Problem eine Lösung?

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Gegeben sei das quadratische Optimierungsproblem

$$(P) \quad \min \left\{ \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \mid b - Ax = 0, \quad x \geq 0 \right\}$$

mit den Spaltenvektoren $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ sowie der $(n \times n)$ -Matrix Q und der $(m \times n)$ -Matrix A , wobei $m \geq n$ gilt.

- (a) Diskutieren Sie die Bedingungen aus dem Satz von KUHN-TUCKER.
- (b) Für $Q = 0 \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist (P) ein lineares Optimierungsproblem. Bestimmen Sie das zu (P) duale Problem (P^*) . Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Lösung des dualen Problems (P^*) und dem Satz von KUHN-TUCKER ?

Aufgabe 4: (4 Punkte)Gegeben seien Zahlen $x_i, i = 1, \dots, n$, mit $\sum_{i=1}^n x_i = \sigma$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{\sigma^2}{n}.$$